2014학년도 논술 고사 모범답안 자연계열

문제 1 (50점)

[문제 1-1] <10 점> **정리** 1을 이용하여 1부터 10^4까지의 자연수 중 4의 배수도 6의 배수도 아닌 것의 개수를 구하라.

풀이 전체집합 $U=\{1,2,\cdots,10^4\}$,
$A_1=\{n\in U: n$은 4의 배수$\}$, $A_2=\{n\in U: n$은 6의 배수$\}$라 하면 원하는 수는
$n(A_1^c\cap A_2^c)$이다. $N_1=n(A_1)+n(A_2)=2500+1666=4166$, $N_2=n(A_1\cap A_2)=833$ 이므로
정리 1에 의하여 $n(A_1^c\cap A_2^c)=10000-4166+833=6667$ 이다.

[문제 1-2] <20점> (그림 3)의 체스판에 **4개**의 돌을 각 행과 각 열에 많아야 한 개 놓는 방법들의 집합을 U라 하고, $i=1,2,3,4,5$에 대하여 U의 원소 중 E_i 에 반드시 돌을 놓는 방법들의 집합을 A_i라 하자.

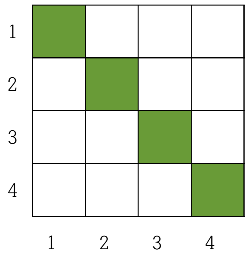
1) <15점> $n(A_1)$을 구하라.
2) <5점> $A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c\cap A_4^c\cap A_5^c$ 의 원소는 어떤 방법인지 설명하라.

1					E_1
2				E_2	
3	E_3				
4		E_4			
5			E_5		
	1	2	3	4	5

풀이 1) E_1에 돌을 놓아야하므로 1행과 5열을 제외한 나머지 4×4체스판에 3**개**의 돌을 각 행과 각 열에 기껏해야 하나씩만 놓는 방법의 수를 계산하면 된다. 4개의 행 가운데 돌이 놓이지 않는 한 행과, 4개의 열 가운데 돌이 놓이지 않는 한 열을 선택하는 방법이 $4\times4=16$ 가지이며 나머지 3×3체스판에 세 개의 돌을 놓는 방법은 $3!=6$이므로 $n(A_1)=16\times6=96$이다. $A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c\cap A_4^c\cap A_5^c$의 원소들은 E_i, $i=1,2,3,4,5$에 모두 돌을 놓지 않는 방법이다.

2) $A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c\cap A_4^c\cap A_5^c$의 원소들은 E_i, $i=1,2,3,4,5$에 모두 돌을 놓지 않는 방법이다.

[문제 1-3] <20점> (그림 4)의 체스판에 **4개**의 돌을 각 행과 각 열에 하나의 돌만 있도록 놓는 방법을 생각해 보자. 검게 칠해져 있는 자리에는 돌을 놓을 수 없다면 몇 가지 방법이 있는지 제시문 (가)의 정리를 이용하여 구하라.



(그림 4)

풀이 전체집합 U는 바둑판 $B(5)$의 각행과 열에 하나씩 다섯 개의 바둑돌을 놓는 방법들의 집합. A_i, $i=1,2,\cdots,5$, 는 각각 i번째 행의 색이 칠해진 부분에 돌을 놓는 방법들의 집합이라고 하자. 우리가 원하는 방법은 색이 칠해진 부분에 돌을 전혀 놓지 않는 것이므로 $A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_5^c$의 원소의 개수를 세는 것과 같다.

$n(U)=4!=24$

$N_1 = n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)+n(A_4)=3!\times 4=24$

$N_2 = n(A_1 \cap A_2)+n(A_1 \cap A_3)+n(A_1 \cap A_4)+n(A_2 \cap A_3)+n(A_2 \cap A_4)+n(A_3 \cap A_4)$
$\quad = 2!\times 6 = 12$

$N_3 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_4)+n(A_1 \cap A_3 \cap A_4)+n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)=4$

$N_3 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)=1$

이므로 $n(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c)=24-24+12-4+1=9$ 이다.

[문제 2-1] <20점> 제시문 (가)의 내용을 바탕으로 다음 물음에 답하라.

1) $\sin(20^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\cdot\sin(80^\circ)$ 을 구하라.

2) 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{7}$$
$$a_{n+1} = a_n \cos\frac{\pi}{7\cdot 2^n},\ n = 1,2,\dots$$

극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 을 구하라.

<u>**풀이**</u> 곱을 합·차로 고치는 공식을 반복 적용하면

1)
$$\begin{aligned}\sin(20^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\cdot\sin(80^\circ) &= -\frac{1}{2}\left(\cos(100^\circ)-\cos(60^\circ)\right)\cdot\sin(40^\circ)\\ &= -\frac{1}{2}\cos(100^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\\ &\quad+\frac{1}{2}\cos(60^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\sin(140^\circ)-\sin(60^\circ)\right)+\frac{1}{4}\sin(40^\circ)\\ &= \frac{1}{4}\sin(60^\circ)+\frac{1}{4}\left(-\sin(140^\circ)+\sin(40^\circ)\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

2) 사인 함수에 대한 배각 공식에 의하여

$$\begin{aligned}a_n\sin\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}} &= \cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7\cdot 2}\cdots\cos\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}}\cdot\sin\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}}\\ &= 2^{-n}\sin\frac{2\pi}{7}\end{aligned}$$

이 성립하므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 아래와 같이 주어진다.

$$a_n = \frac{2^{-n}\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}}}$$

삼각함수의 극한에 관한 공식 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 으로부터 $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\frac{2\pi}{7}}$ 을 얻는다.

[문제 2-2] <20점> 점 $(1,0)$을 출발하여, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 시곗바늘이 도는 방향과 <u>반대인 방향</u>으로 움직이는 점 P를 생각하자. 열린구간 $(-1,1)$의 수 t에 대하여, 점 P의 x좌표가 처음으로 t가 될 때까지 이동한 거리를 $\alpha(t)$, y좌표가 처음으로 t가 될 때까지 이동한 거리를 $\beta(t)$라 하고 $f(t)=\sin(2\alpha(t))+\cos(2\beta(t))$로 정의하자.

1) <10점> 함수 $f(t)$를 삼각함수를 사용하지 않고 나타내라.

2) <10점> 열린구간 $(-1,1)$에서 $f'(t)=0$인 t를 모두 구하라.

풀이 1) 단위원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 대응하므로, 사인과 코사인의 배각 공식에 의하여

$$\sin(2\alpha(t)) = 2\sin(\alpha(t))\cos(\alpha(t)) = 2t\sqrt{1-t^2}$$
$$\cos(2\alpha(t)) = 1 - 2\sin^2(\alpha(t)) = 1-2t^2$$

을 얻는다. 이로부터 $f(t) = 2t\sqrt{1-t^2}+1-2t^2$ 임을 알 수 있다.

2) 함수 $f(t)$를 미분하면, $f'(t) = 2\sqrt{1-t^2} - \dfrac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}} - 4t$ 이다. $f'(t)=0$에서 $1-2t^2 = 2t\sqrt{1-t^2}$ 이다. 양변을 제곱하여 정리하면 $8t^4-8t^2+1=0$, 따라서 $t^2 = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$ 이다. 한편, t와 $1-2t^2$ 의 부호는 같아야 하므로 $f'(t)=0$ 의 근은 $t = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 이다.

[문제 2-3] <10점> 자연수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{P}(1,a)$, $\mathrm{Q}(b,1)$를 생각하자. 원점 O를 중심으로 점 P를 시곗바늘이 도는 방향과 같은 방향으로 $\dfrac{\pi}{4}$만큼 회전한 점을 P$'$, 점 Q를 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 γ만큼(단, γ는 $\tan\gamma = \dfrac{1}{2}$ 인 예각) 회전한 점을 Q$'$이라 하자. 세 점 O, P$'$, Q$'$이 일직선 위에 있도록 하는 자연수 a, b의 쌍을 모두 구하라. (단, $2 \le a < b$)

풀이 $\tan\phi = \dfrac{1}{a}$, $\tan\psi = \dfrac{1}{b}$ 인 예각 ϕ, ψ를 생각하자. 문제의 조건은 아래 조건과 동등하다.

$$(*) \qquad \frac{\pi}{4} - \gamma = \phi + \psi$$

탄젠트에 대한 덧셈정리로부터

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$
$$\tan(\phi+\psi) = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{a}\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{ab-1}$$

을 얻는다. 식 (*)에 의하여 $\dfrac{a+b}{ab-1}=\dfrac{1}{3}$, 즉

$ab-3b-3a-1=0$를 얻는다. 식을 정리하면 $(a-3)(b-3)=10$이다.

이 식을 만족하는 자연수의 쌍은 $(4,13)$, $(5,8)$ 이다.