2014학년도 논술 고사 모범답안 자연계열

[문제 1-1] <25점> 평면 위의 점들을 원점을 중심으로 하여 (시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로) 90° 만큼 회전이동하는 변환을 α, 평면 위의 점들을 y축에 대하여 대칭이동시키는 변환을 β라 하자. 다음 물음에 답하라.

1) <10점> 두 변환 α와 β를 차례로 적용하는 변환 $\gamma=\beta\circ\alpha$는 직선에 대하여 대칭이동을 하는 변환이다. 선대칭변환 γ는 어떤 직선에 대한 대칭변환인가?
2) <5점> 평면의 한 부분집합 T는 두 변환 α와 β 모두에 대한 대칭성을 가지는 집합이다. 집합 T는 변환 $\gamma=\beta\circ\alpha$ 에 대해서도 대칭성을 가지는가?
3) <10점> α와 β 모두에 대한 대칭성을 가지고 집합 $\{Q(3,4)\}$를 포함하는 최소의 집합을 구하라.

풀이 1) 평면의 한 점 (x,y)는 원점을 중심으로하여 반시계방향으로 90° 회전시키면 $\alpha(x,y)=(-y,x)$가 되고 다시 y축에 대하여 대칭이동을 시키면 $\beta(\alpha(x,y))=(y,x)$이 된다. 따라서 γ는 직선 $y=x$에 대한 대칭이동이다.

2) T는 α에 대한 대칭성을 가지므로 $\alpha(T)=T$이며 T는 β에 대한 대칭성을 가지므로, $(\beta(\alpha(T)))=(\beta(T))=T$ 이다.
따라서 집합 T는 변환 $\gamma=\beta\circ\alpha$ 에 대해서도 대칭성을 가진다.

3) 점 $Q(3,4)$를 원점을 중심으로 반시계방향으로 90° 만큼 회전시키면 $\alpha(3,4)=(-4,3)$ 이므로 점 $Q_1(-4,3)$은 반드시 $S(A)$의 원소이어야 하며, $Q_1(-4,3)$을 90° 만큼 회전시킨 $Q_2(-3,-4)$도 $S(A)$의 원소이어야 한다. 마찬가지로 $\alpha(-3,-4)=(4,-3)$이므로 $Q_3(4,-3)$도 $S(A)$의 원소이어야 함을 알 수 있다.
이제 집합 $A'=\{Q(3,4),Q_1(-4,3),Q_2(-3,-4),Q_3(4,-3)\}$ 은 변환 α에 대하여 대칭성을 가짐을 쉽게 알 수 있다. 이제 A'에 γ 를 적용해보면
$A''=\{(3,4),(-4,3),(-3,-4),(4,-3),(4,3),(3,-4),(-4,-3),(-3,4)\}$는 $S(A)$의 부분집합이어야 한다. A'' 은 α와 β 모두에 대한 대칭성을 가지므로 $S(A)=A''=\{(3,4),(-4,3),(-3,-4),(4,-3),(4,3),(3,-4),(-4,-3),(-3,4)\}$ 이다.

[문제 1-2] <10점> 예제 3의 C를 포함하며 F에 대한 대칭성을 가지는 최소의 집합 $S(C)$를 구하라.

풀이 함수F는 1을 2로 2를 1로 바꾸는 일을 한다.
$F([1;1;2;3])=[2;2;1;3]$, $F([2;2;3;4])=[1;1;3;4]$, $F([3;3;4;5])=[3;3;4;5]$
$F([4;4;5;1])=[4;4;5;2]$, $F([5;5;1;2])=[5;5;1;2]$이므로 $[2;2;1;3]$, $[1;1;3;4]$, $[4;4;5;2]$는 모두 $S(C)$의 원소이어야 한다. 이제 $S(C)\cup\{[2;2;1;3],[1;1;3;4],[4;4;5;2]\}$에 F를 적용하면 여전히 $S(C)\cup\{[2;2;1;3],[1;1;3;4],[4;4;5;2]\}$의 원소이므로
$S(C)=S\cup\{[1;2;2;3],[1;1;3;4],[2;4;4;5]\}$이다.

[문제 1-3] <15점> 집합 U를 1부터 4까지의 자연수에서 중복을 허락하여 4개의 수를 선택하여 만든 중복조합들의 모임이며 $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ 는 각각 1과 2, 2와 3, 3과 4를 서로 바꾸어주는 $\{1,2,3,4\}$에서 $\{1,2,3,4\}$로의 일대일 대응이라 하자:

x	1	2	3	4
$\phi_1(x)$	2	1	3	4
$\phi_2(x)$	1	3	2	4
$\phi_3(x)$	1	2	4	3

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 : U \to U$ 는 다음과 같이 정의된 U에서 U로의 일대일 대응이다:

$$[a;b;c;d] \in U\text{에 대하여 } \Phi_i([a;b;c;d]) = [\phi_i(a);\phi_i(b);\phi_i(c);\phi_i(d)],\quad i=1,2,3.$$

U의 부분집합 $D = \{[2;3;3;4]\}$를 포함하며 Φ_1, Φ_2, Φ_3에 대하여 대칭성을 가지는 최소의 집합 $S(D)$의 원소의 개수를 구하라.

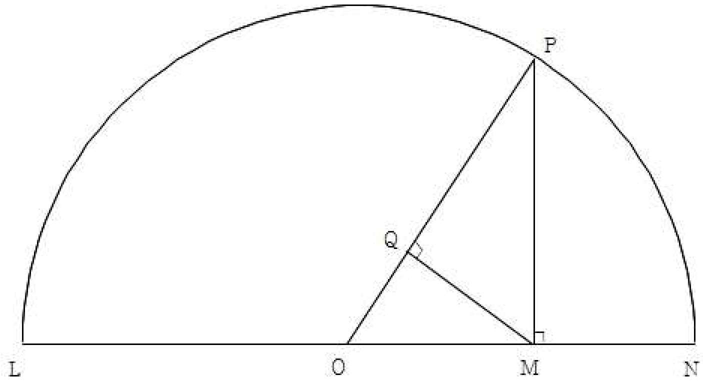
풀이 $\tau_1 = \phi_2\phi_1\phi_2$ 는 1과 3을 서로 바꾸어 주며 $\tau_2 = \phi_3\tau\phi_3$ 는 1과 4를 그리고 $\tau_3 = \phi_3\phi_2\phi_3$는 2와 4를 서로 바꾸어 주는 $\{1,2,3,4\}$의 일대일 대응이다. 따라서

$[\tau_1(2), \tau_1(3), \tau_1(3), \tau_1(4)] = [2;1;1;4] \in S(D)$
$[\phi_1(2);\phi_1(1);\phi_1(1);\phi_1(4)] = [1;2;2;4] \in S(D)$
$[\phi_3(2);\phi_3(3);\phi_3(3);\phi_3(4)] = [2;4;4;3] \in S(D)$

이어야 한다. 따라서 중복되는 1, 2, 3, 4 가 모두 나타나며 중복되는 원소를 제외한 두 원소로 세 가지 조합이 모두 가능하다. 따라서 $S(D)$는 한 원소가 두 번 중복되어 나타나는 모든 중복조합들의 집합이다. $n(S(D))$ 는 중복조합에 두 번 나타나는 원소를 고르는 방법의 수 4와 나머지 수 중에서 두 원소를 선택하는 ${}_3C_2 = 3$의 곱인 12이다.

[문제 2-1] <15점> 아래 그림과 같은 중심이 O, 반지름이 $\overline{\mathrm{ON}}$인 반원을 생각하자. $\overline{\mathrm{ON}}$ 위의 한 점 M과 원주 상의 또 다른 점 P를 잡고 점 M에서 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 선분 $\overline{\mathrm{LM}}$, 선분 $\overline{\mathrm{MN}}$의 길이를 각각 a, b라 하자.

1) <10점> 선분 $\overline{\mathrm{LO}}$, $\overline{\mathrm{PM}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 각각 a와 b의 산술평균 A, 기하평균 G, 조화평균 H 를 이용하여 나타내라.
2) <5점> 부등식 $H \le G \le A$가 성립하는 이유를 1)을 이용하여 설명하라.



풀이 1) 그림에서 $\overline{\mathrm{LO}} = \dfrac{a+b}{2}$이므로 $A = \overline{\mathrm{LO}}$ 이다. <甲>

원의 성질로부터 $\overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{LM}} \times \overline{\mathrm{MN}} = ab$ 이므로 $G = \overline{\mathrm{PM}}$ 이다. <乙>

$\Delta\mathrm{OMP}$ 의 넓이를 고려하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{QM}} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OM}} \times \overline{\mathrm{MP}}$$

이로부터

$$A \times \overline{\mathrm{QM}} = \frac{b-a}{2} \times G$$이다.

$\Delta\mathrm{QMP}$ 에 피타고라스 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} A^2 \times \overline{\mathrm{PQ}}^2 &= A^2 \times \left(\overline{\mathrm{PM}}^2 - \overline{\mathrm{QM}}^2\right) = A^2 G^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 G^2 \\ &= \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) G^2 = G^4 \end{aligned}$$

즉, $A \times \overline{\mathrm{PQ}} = G^2$ 을 얻게 되므로 이로부터 $\overline{\mathrm{PQ}} = H$를 얻는다. <丙>

2) 직각삼각형에서 빗변의 길이는 다른 변보다 길다. 이를 $\Delta\mathrm{QMP}$와 $\Delta\mathrm{OMP}$에 적용하면 부등식 $H \le G \le A$를 얻는다.

[문제 2-2] <15점> 300개의 자료를 100개와 200개로 나누어 산술평균과 조화평균을 각각 구했더니 아래 표와 같았다.

구분	산술평균	조화평균
100개의 자료	1	4/7
200개의 자료	3/2	1

여기에 양수 x를 100개 추가한 400개의 자료에 대한 산술평균이 조화평균의 2배가 된다면 x는 얼마인가?

풀이 그룹 1의 변량을 x_1, x_2,..., x_{100}, 그룹 2의 변량을 y_1, y_2,..., y_{200}, 추가되는 변량을 Z라 하면, 전체 자료의 산술 평균 A와 조화 평균 H 는 각각 아래와 같이 구해진다.

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{100}x_i+\sum_{i=1}^{200}y_i+100\times Z}{400}$$

$$H^{-1}=\frac{\sum_{i=1}^{100}x_i^{-1}+\sum_{i=1}^{200}y_i^{-1}+100\times Z^{-1}}{400}$$

한편, 주어진 표로부터

$$\sum_{i=1}^{100}x_i=100\times 1\ ,\ \sum_{i=1}^{200}y_i=200\times\frac{3}{2},\ \sum_{i=1}^{100}x_i^{-1}=100\times\frac{7}{4},\ \sum_{i=1}^{200}y_i^{-1}=200\times 1,$$

이 성립한다. 이를 이용하면,

$$A=\frac{100\times 1+200\times\frac{3}{2}+100\times Z}{400}=\frac{4+Z}{4}$$

$$H^{-1}=\frac{100\times\frac{7}{4}+200\times 1+100\times Z^{-1}}{400}=\frac{\frac{15}{4}+Z^{-1}}{4}$$

$$H=\frac{16}{15+4\times Z^{-1}}$$

문제에서 주어진 조건 $A:H=2:1$ 로부터 $(15+4Z^{-1})\times(4+Z)=128$을 얻는다. 이 식을 풀면 $Z=4/15,\ 4$.

[문제 2-3] <20점> 두 양수 a와 b의 산술평균, 조화평균, 이차평균을 각각 A, H, R이라 하자.

1) <5점> 산술평균 A와 이차평균 R 사이의 대소 관계를 논하라.
2) <15점> 다음 부등식이 a와 b에 상관없이 항상 성립하도록 하는 가장 큰 양의 상수 α를 구하고, 제시문 (나)에서와 같이 $t=b/a$ 를 도입하여 부등식을 증명하라.

$$\boxed{\frac{\alpha R+H}{3}\le A}$$

풀이 1) $R^2-A^2=(a^2+b^2)/2-(a^2+2ab+b^2)/4=(a-b)^2/4\ge 0$ 이므로 일반적으로 $R\ge A$

가 성립한다. <甲>

등호가 성립하기 위한 필요충분조건은 $a=b$ 이다. <乙>

2) 주어진 부등식의 좌변과 우변은 각각 $a \cdot \dfrac{\alpha\sqrt{(1+(b/a)^2)/2}+2(b/a)/(1+b/a)}{3}$, $a \cdot \dfrac{1+b/a}{2}$ 이다. 따라서 주어진 부등식은 $\lambda \ge 1$에 대한 아래 부등식과 동등하다.

$$\boxed{\frac{\alpha\sqrt{(1+\lambda^2)/2}+2\lambda/(1+\lambda)}{3} \le \frac{1+\lambda}{2}}$$

이 부등식이 $\lambda=1$일 때에도 성립하여야 하므로 $\dfrac{\alpha+1}{3} \le 1$, 즉 $\alpha \le 2$이어야 한다.

$\alpha=2$인 경우 부등식이 성립하는지 알아보기 위하여

$F(\lambda)=\sqrt{2+2\lambda^2}+2\lambda/(1+\lambda)-3(1+\lambda)/2$ 라 하면,

$F'(\lambda)=2\lambda/\sqrt{2+2\lambda^2}+2/(1+\lambda)^2-3/2$,

$F''(\lambda)=4/\left(\sqrt{2+2\lambda^2}\right)^3-4/(1+\lambda)^3$ 이다.

문제 (1)에 의하여 임의의 양수 λ에 대하여 $\sqrt{2+2\lambda^2} \ge 1+\lambda$ 이므로 $F''(\lambda) \le 0$, 즉 $F'(\lambda)$는 감소한다. 따라서 $\lambda \ge 1$에 대하여 $F'(\lambda) \le F'(1)=0$. 따라서 $F(\lambda)$는 감소한다. $F(\lambda) \le F(1)=0$ 가 성립한다. 그러므로 주어진 부등식은 $\alpha=2$인 경우 성립하고, 주어진 부등식을 만족하는 가장 큰 양의 상수 α는 2이다.