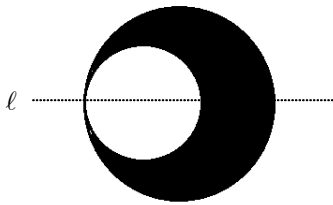
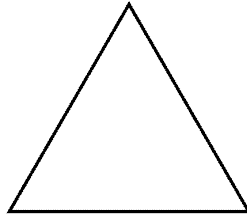


[문제1] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

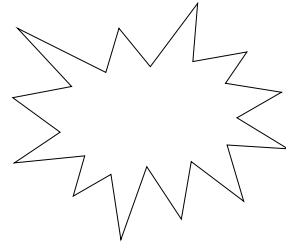
(가) 평면의 한 부분집합 S 를 생각하자. 우리는 S 를 한 점을 중심으로 회전이동하거나, 어떤 직선에 대하여 대칭이동한 결과가 여전히 S 와 같은 집합이면 S 가 각각 회전변환과 선대칭변환에 대한 **대칭성**을 가진다고 말한다. 예를 들어 (그림 1)의 검은 부분을 S 라 하면 S 는 직선 l 에 대하여 대칭이동을 하여도 여전히 S 와 같은 집합이므로 S 는 선대칭변환에 대한 대칭성을 가진다. (그림 2)의 정삼각형은 무게중심을 중심으로 120° 만큼 회전이동하면 여전히 같은 삼각형이므로 회전변환에 대한 대칭성을 가진다. 하지만 (그림 3)의 경우에는 어떤 대칭성도 찾을 수 없다.



(그림 1)



(그림 2)



(그림 3)

주어진 집합의 대칭성을 알아내는 일은 어려워 보이지 않는다. 그렇다면 평면의 한 부분집합 A 를 포함하며 주어진 변환들에 대하여 대칭성을 가지는 **최소**의 집합 $S(A)$ 를 만들 수 있을까?

예제 1. 집합 A 를 xy 평면의 한 점 $P(1,0)$ 로 이루어진 집합이라고 하자. 그리고 평면 위의 점들을 원점을 중심으로 하여 (시계바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로) 120° 만큼 회전이동하는 변환 ρ 가 주어졌다고 하자. 집합 A 에 필요한 원소들을 추가하여 변환 ρ 에 대하여 대칭성을 가지는 **최소**의 집합 $S(A)$ 를 구해 보자. 점 $P(1,0)$ 를 원점을 중심으로 120° 만큼 회전시키면 $\rho(1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로 점 $P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 은 반드시 $S(A)$ 의 원소이어야 하며, $P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 120° 만큼 회전시키면 $\rho\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로 $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 도 $S(A)$ 의 원소이어야 한다. 이제 집합 $\left\{P(1,0), P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ 은 변환 ρ 에 대하여 대칭성을 가짐을 쉽게 알 수 있으며 따라서 $S(A) = \left\{P(1,0), P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ 이다.



(나) 우리는 평면에서의 대칭성을 일반적인 집합에서의 대칭성으로 확장하여 생각할 수 있다. 전체집합 U 와 U 에서 U 로의 일대일 대응 $F: U \rightarrow U$ 가 주어졌다고 하자. S 가 U 의 한 부분집합일 때 함수 F 가 S 에 작용하여 얻어진 집합을 다음과 같이 표시하기로 하자:

$$F(S) = \{F(s) \mid s \in S\}$$

$F(S)$ 가 S 와 여전히 같은 집합이면 S 는 함수 F 에 대한 대칭성을 가진다고 한다.

예제 2. 집합 X 를 1부터 5까지의 자연수 집합 그리고 f 와 g 는 다음과 같이 정의된 X 에서 X 로의 일대일 대응이라 하자:

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 5.$$

$$g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4, g(4) = 5, g(5) = 1.$$

X 의 세 부분집합을 $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 라 하면

1은 S_1 의 원소이지만 $f(1) \notin S_1$, $g(1) \notin S_1$ 이므로 S_1 은 f 에 대한 대칭성도 g 에 대한 대칭성도 가지지 않는다. 한편 $f(S_2) = \{f(1), f(2)\} = \{2, 1\} = S_2$ 이므로 S_2 는 f 에 대한 대칭성은 가지지만, $g(2) = 3 \notin S_2$ 이므로 g 에 대한 대칭성은 가지지 않는다. 그리고 S_3 는 f 와 g 에 대한 대칭성을 모두 가짐을 확인할 수 있다.

주어진 n 개의 대상으로부터 중복을 허락하여 r 개를 뽑는 것을 n 개중 r 개를 택하는 중복조합이라 부른다. 중복조합을 표시하는 방법으로 우리는 $[a_1; a_2; \dots; a_r]$ 과 같은 방법을 쓰기로 한다. 예를 들어 2개의 문자 a, b 중에서 3개를 택하는 중복조합에는 $[a; a; a]$, $[a; a; b]$ 등이 있으며 $[a; a; b]$ 는 $[a; b; a]$ 와 같은 중복조합이다. 중복조합들을 원소로 갖는 집합의 대칭성을 알아보기로 하자.

예제 3. 집합 M 을 1부터 5까지의 자연수에서 중복을 허락하여 4개의 수를 선택하여 만든 중복조합들을 원소로 가지는 집합이라 하자. f 와 g 가 예제 2에 주어진 함수일 때, F 와 G 는 다음과 같이 정의된 M 에서 M 으로의 함수라 하자: $[a; b; c; d] \in M$ 가 1부터 5까지의 자연수에서 중복을 허락하여 4개의 수를 선택하여 만든 중복조합일 때,

$$F([a; b; c; d]) = [f(a); f(b); f(c); f(d)]$$

$$G([a; b; c; d]) = [g(a); g(b); g(c); g(d)].$$

예를 들어 $[1; 1; 3; 5]$ 는 M 의 한 원소이며

$$F([1; 1; 3; 5]) = [f(1); f(1); f(3); f(5)] = [2; 2; 3; 5]$$

$G([1; 1; 3; 5]) = [g(1); g(1); g(3); g(5)] = [2; 2; 4; 1]$ 이다. M 의 한 부분집합 C 가 $C = \{[1; 1; 2; 3], [2; 2; 3; 4], [3; 3; 4; 5], [4; 4; 5; 1], [5; 5; 1; 2]\}$ 일 때 C 는 F 에 대한 대칭성을 가지지 않지만 G 에 대한 대칭성을 가진다.



2014학년도 논술 고사

자연계열

[문제 1-1] <25점> 평면 위의 점들을 원점을 중심으로 하여 (시계바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로) 90° 만큼 회전이동하는 변환을 α , 평면 위의 점들을 y 축에 대하여 대칭이동시키는 변환을 β 라 하자.

- 1) <10점> 두 변환 α 와 β 를 차례로 적용하는 변환 $\gamma = \beta \circ \alpha$ 는 직선에 대하여 대칭이동을 하는 변환이다. 선대칭변환 γ 는 어떤 직선에 대한 대칭변환인가?
- 2) <5점> 평면의 한 부분집합 T 는 두 변환 α 와 β 모두에 대한 대칭성을 가지는 집합이다. 집합 T 는 변환 $\gamma = \beta \circ \alpha$ 에 대해서도 대칭성을 가지는가?
- 3) <10점> α 와 β 모두에 대한 대칭성을 가지고 집합 $\{Q(3, 4)\}$ 를 포함하는 최소의 집합을 구하라.

[문제 1-2] <10점> 예제 3의 C 를 포함하며 F 에 대한 대칭성을 가지는 최소의 집합 $S(C)$ 를 구하라.

[문제 1-3] <15점> 집합 U 를 1부터 4까지의 자연수에서 중복을 허락하여 4개의 수를 선택하여 만든 중복조합들의 모임이며 $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ 는 각각 1과 2, 2와 3, 3과 4를 서로 맞바꾸어주는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $\{1, 2, 3, 4\}$ 로의 일대일 대응이라 하자:

x	1	2	3	4
$\phi_1(x)$	2	1	3	4
$\phi_2(x)$	1	3	2	4
$\phi_3(x)$	1	2	4	3

$\phi_1, \phi_2, \phi_3 : U \rightarrow U$ 는 다음과 같이 정의된 U 에서 U 로의 일대일 대응이다:

$$[a; b; c; d] \in U \text{에 대하여 } \phi_i([a; b; c; d]) = [\phi_i(a); \phi_i(b); \phi_i(c); \phi_i(d)], \quad i = 1, 2, 3.$$

U 의 부분집합 $D = \{[2; 3; 3; 4]\}$ 를 포함하며 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 에 대하여 대칭성을 가지는 최소의 집합 $S(D)$ 의 원소의 개수를 구하라.



[문제2] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 주어진 n 개의 양수 a_1, a_2, \dots, a_n 의 산술평균 A , 기하평균 G , 조화평균 H 는 다음 식으로 정의된다.

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}, \quad H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

또한, 각 수의 제곱의 산술평균의 제곱근을 이차평균이라 하고 R 로 표기한다. 즉,

$$R = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{1/2}$$
 이다. 예를 들어, 두 수 1, 3에 대하여 $A = 2, G = \sqrt{3},$

$H = \frac{3}{2}, R = \sqrt{5}$ 이다. 두 양수 a, b 의 산술평균 A , 기하평균 G , 조화평균 H 사이에 다음 관계가 성립한다.

$$G^2 = AH$$

(나) 여러 가지 평균 또는 이와 관련된 값들 사이의 크기를 비교하는 것은 흥미롭다. 두 양수 a, b 의 산술평균 A , 기하평균 G , 조화평균 H 사이의 부등식 $H \leq G \leq A$ 는 여러 문제에서 활용된다.

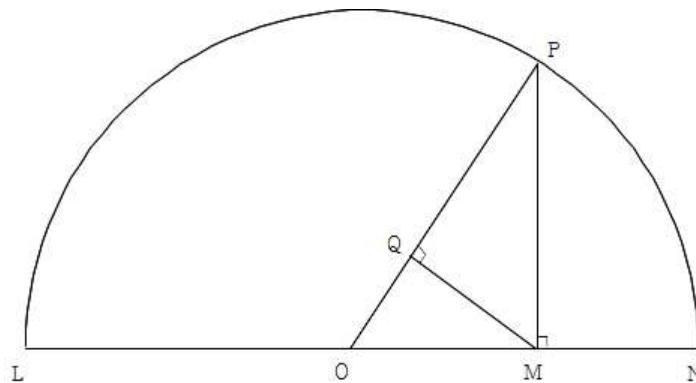
부등식을 증명하는데 미분법을 활용할 수 있다. 여기서는 주어진 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여, 두 수의 차를 두 수의 로그 값의 차로 나눈 로그 평균 L 이 기하평균 G 보다 크다는 사실을 증명하려 한다. 즉, 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이려 한다.

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \tag{1}$$

편의상 $0 < a < b$ 라 하자. 부등식 (1)의 양변을 a 로 나눈 후 $t = b/a$ 라 놓으면 $t > 1$ 에서 $\sqrt{t} < \frac{t-1}{\ln t}$ 이 성립함을 보이려 충분하다. 이제 양의 실수들의 집합에서 정의된 함수 $f(t) = \sqrt{t} \ln t - (t-1)$ 을 생각하자. 이 함수의 도함수들을 구하면 $f'(t) = \frac{\ln t}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} - 1, f''(t) = -\frac{\ln t}{4t\sqrt{t}}$. $f''(t)$ 의 부호 변화를 고려하면 $f'(t)$ 는 $t=1$ 에서 최댓값을 가지며 구간 $(1, \infty)$ 에서 증가상태이다. 따라서 $t > 1$ 에 대하여 $f'(t) < f'(1) = 0$ 을 얻는다. 따라서 $f(t)$ 는 구간 $(1, \infty)$ 에서 감소상태이므로 $f(t) < f(1) = 0$ 을 얻어 부등식 (1)이 성립함을 알 수 있다.

[문제 2-1] <15점> 아래 그림과 같은 중심이 O , 반지름이 \overline{ON} 인 반원을 생각하자. \overline{ON} 위의 한 점 M 과 원주 상의 또 다른 점 P 를 잡고 점 M 에서 선분 \overline{OP} 에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 선분 \overline{LM} , 선분 \overline{MN} 의 길이를 각각 a , b 라 하자.

- 1) <10점> 선분 \overline{LO} , \overline{PM} , \overline{PQ} 의 길이를 각각 a 와 b 의 산술평균 A , 기하평균 G , 조화평균 H 를 이용하여 나타내라.
- 2) <5점> 부등식 $H \leq G \leq A$ 가 성립하는 이유를 1)을 이용하여 설명하라.



[문제 2-2] <15점> 300개의 자료를 100개와 200개로 나누어 산술평균과 조화평균을 각각 구했더니 아래 표와 같았다.

구분	산술평균	조화평균
100개의 자료	1	4/7
200개의 자료	3/2	1

여기에 양수 x 를 100개 추가한 400개의 자료에 대한 산술평균이 조화평균의 2배가 된다면 x 는 얼마인가?

[문제 2-3] <20점> 두 양수 a 와 b 의 산술평균, 조화평균, 이차평균을 각각 A , H , R 이라 하자.

- 1) <5점> 산술평균 A 와 이차평균 R 사이의 대소 관계를 논하라.
- 2) <15점> 다음 부등식이 a 와 b 에 상관없이 항상 성립하도록 하는 가장 큰 양의 상수 α 를 구하고, 제시문 (나)에서와 같이 $t = b/a$ 를 도입하여 부등식을 증명하라.

$$\frac{\alpha R + H}{3} \leq A$$