2014학년도 모의 논술 고사

자연계열

문제 1 (50점)

무게중심

(가) 모든 물체에는 무게중심이라고 하는 특별한 점이 있다. 물체의 형태에 따라 이 무게중심의 위치는 물체의 내부에 있을 수도 있고 외부에 있을 수도 있다. 어떤 물리 현상에서는 물체의 전체 질량이 한 점에 몰려있다고 생각하는 것이 편할 때가 있다. 그럴 때 무게중심이 질량이 몰려있는 점의 역할을 한다. 뉴턴의 만유인력의 법칙을 예로 들어 보자. 두 개의 물체 사이에는 서로 끌어당기는 힘이 작용하는데, 이 힘의 크기는 두 물체의 질량의 곱에 비례하고 두 물체 사이의 거리의 제곱에 반비례한다. 이 때 두 물체 사이의 거리는 각 물체의 무게중심들 사이의 거리가 되는데, 이런 이유로 각 물체의 질량은 각각의 무게중심에 몰려있다고 생각할 수 있다.

평평한 바닥에 놓여 있는 물체에 힘을 가할 때, 힘의 방향이 무게중심을 향하지 않으면 물체가 회전하기도 한다. 납작한 물체는 무게중심 부분을 밑에서 받쳐 들거나, 무게중심을 지나는 선을 밑에서 받쳐 들면 수평으로 균형을 취한다.

두 개의 부분으로 이루어진 물체의 무게중심에 대해서는 다음과 같은 아르키메데스(Archimedes)의 지레의 법칙이 적용된다.

> 질량이 각각 m_1, m_2이고 무게중심이 각각 G_1, G_2인 두 물체로 된 전체 물체의 무게중심 G는 다음 법칙을 따른다.
>
> 1) G는 G_1과 G_2를 잇는 선분 위에 있다.
>
> 2) G와 G_1 사이의 거리를 d_1, G와 G_2 사이의 거리를 d_2라 하면, $m_1 d_1 = m_2 d_2$이다.
>
> 즉, G는 $\overline{G_1 G_2}$를 $m_2 : m_1$으로 내분하는 점이다.

(나) 도형을 밀도가 균일한 납작한 물체처럼 생각하면 도형에 대해서도 무게중심을 말할 수 있다. 여기서 도형은 내부를 포함해서 생각하고 넓이를 질량처럼 취급한다. 이렇게 할 때 도형의 무게중심은 다음과 같은 성질을 만족한다.

(1) 선대칭인 도형의 무게중심은 대칭축 위에 있게 된다.

(2) 점대칭인 도형의 무게중심은 대칭의 중심에 있게 된다.

(3) 닮은 도형의 무게중심들은 닮음변환에 의해 대응되는 위치에 있게 된다.

대칭축이 두 개 이상인 도형은 결국 이 대칭축들의 교점이 무게중심이 된다. 예를 들면, 원의 무게중심은 원의 중심이고, 정사각형의 무게중심은 두 대각선의 교점이다. 평행사변형은 두 대각선의 교점에 대해서 점대칭이므로 이 점이 무게중심이다.

(예) 반지름이 1이고 중심이 각각 $(-1,0)$, $(1,3)$, $(2,-1)$인 세 원 A, B, C로 이루어진 도형 S의 무게중심을 구해 보자. 먼저 각 원의 무게중심은 각각의 중심에 있다. 원 A와 B로 이루어진 도형 S'의 무게중심은, 두 원의 넓이가 같으므로 두 중심을 잇는 선

분을 $1:1$로 내분하는 점 즉, 두 중심의 중점 $(0,3/2)$이 된다. 도형 S는 도형 S'과 원 C로 이루어져 있고 도형 S'과 원 C의 넓이의 비는 $2:1$이므로 구하는 무게중심은 두 점 $(0,3/2)$과 $(2,-1)$을 잇는 선분을 $1:2$로 내분하는 점 $(2/3, 2/3)$이다.

(다) 삼각형에서 한 꼭짓점과 그 마주보는 변의 중점을 연결한 선을 중선이라고 한다. 삼각형에는 세 개의 중선이 있고, 이 세 중선은 한 점에서 만난다. 세 중선의 교점이 삼각형의 무게중심인 것은 잘 알려진 사실이며, 이것을 다음과 같이 설명할 수 있다.

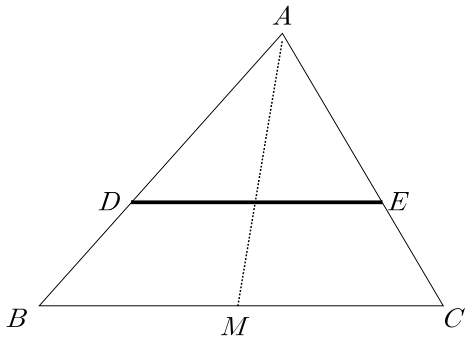


그림 1

삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하자. 삼각형 ABC를 변 BC에 평행인 선분 DE들이 모인 것으로 볼 수 있다. 중선 AM은 선분 DE의 중점을 지나고 이 중점은 선분 DE의 무게중심이다. 따라서 중선 AM을 따라 삼각형 ABC를 밑에서 받쳐 들면 변 BC에 평행인 모든 선분 DE들이 균형을 취하게 되므로 삼각형 ABC가 중선 AM에 대해 수평으로 균형을 취한다. 이것은 삼각형 ABC의 무게중심이 중선 AM 위에 있다는 것을 뜻한다. 다른 중선에 대해서도 같은 사실이 성립하므로, 중선들의 교점이 삼각형의 무게중심이 된다.

[문제 1-1] (10 점) 다음 그림과 같은 도형에 대해 물음에 답하라.

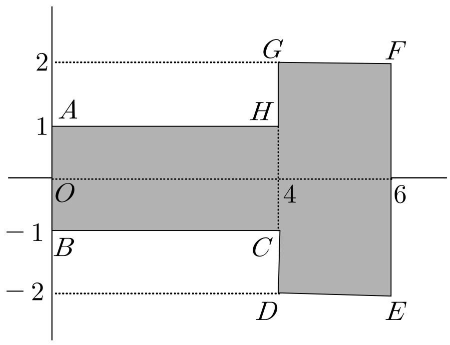


그림 2

(1) 도형 $ABCDEFGH$의 무게중심의 좌표를 구하라.

(2) 삼각형의 무게중심이 중선 위에 있는 것은 중선이 넓이를 이등분하기 때문이라는 주장이 있다. (1)의 결과를 이용해서 이 주장이 타당한지 설명하라.

[문제 1-2] (15 점) 제시문 (다)에 의해 삼각형의 무게중심은 중선 위에 있음을 알았다. 이 사실을 근거로 하고 제시문의 내용을 참조하여 다음과 같이 삼각형의 무게중심이 중선을 $2:1$로 내분하는 위치에 있음을 확인해 보자.

아래 그림과 같이 삼각형 ABC의 중선 AM이 x-축 위에 오게 위치를 잡고, 변 AB와 변 AC의 중점을 각각 L과 N이라 하자. 그러면, 무게중심 G도 x-축 위에 있게 되므로 G의 좌표를 $(x,0)$이라 두자.

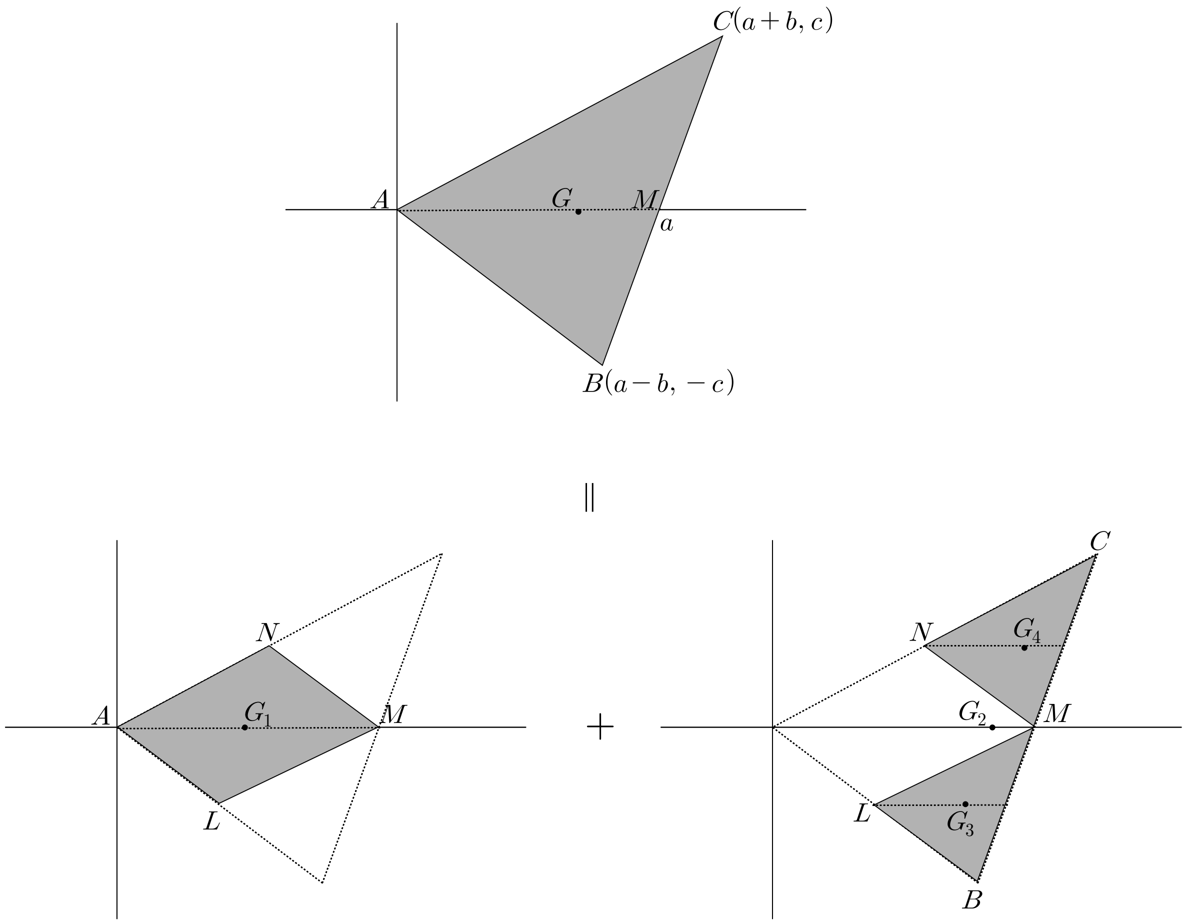


그림 3

(1) 사각형 $ALMN$의 무게중심 G_1의 좌표를 구하라.

(2) 삼각형 LBM의 무게중심 G_3와 삼각형 NMC의 무게중심 G_4의 좌표를 a,b,c,x를 써서 나타내어라.

(3) 두 삼각형 LBM과 NMC로 이루어진 도형 S의 무게중심 G_2의 좌표를 구하라.

(4) 사각형 $ALMN$과 도형 S로 이루어진 삼각형 ABC의 무게중심의 위치를 지레의 법칙을 써서 구하라.

(5) (4)의 결과와 G의 좌표가 $(x,0)$인 것을 써서 $x=\dfrac{2a}{3}$임을 확인하라.

[문제 1-3] (10 점) 반지름이 2인 원에서 반지름이 1인 원을 제외한 다음 그림과 같은 도형이 있다.

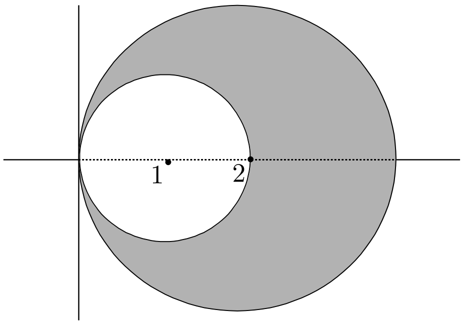


그림 4

무게중심의 좌표를 구하라.

[문제 1-4] (15 점) 길이가 20cm인 같은 크기의 벽돌 A, B, C, D를 다음과 같이 쌓는다.

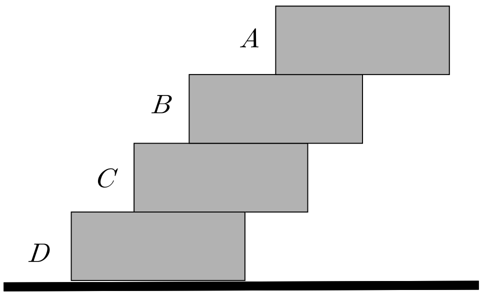


그림 5

이렇게 4 장을 무너지지 않게 쌓을 때 제일 위 벽돌은 제일 아래 벽돌의 오른쪽 끝에서 최대한 얼마나 튀어나올 수 있는가?

문제 2 (50점)

(가) 함수의 곱의 미분법으로부터 유도되는 부분적분법은 적분의 계산에 유용하다. 함수의 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

이다. 따라서 다음 공식이 성립한다.

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

이 공식을 이용한 적분법을 부분적분법이라 한다. 부분적분법을 이용할 때, 미분하여 그 결과가 간단히 되는 것을 $f(x)$로, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 택하면 편리하다.

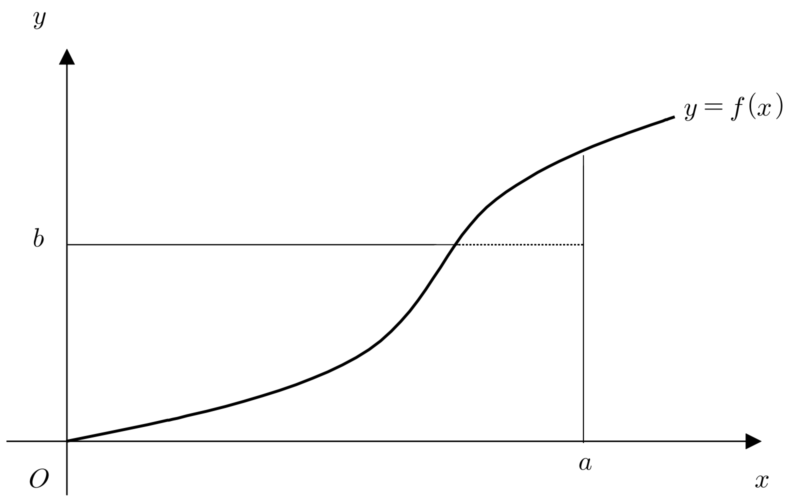
예제 1. 부정적분 $\int xe^x\, dx$를 구하기 위하여 $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$로 놓고 부분적분법을 적용하면, $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$이므로

$$\begin{aligned}\int xe^x\, dx &= xe^x - \int 1 \cdot e^x\, dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

예제 2. 부정적분 $\int \ln x\, dx$를 구하기 위하여 $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$로 놓고 부분적분법을 적용하면, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$이므로

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx \\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

(나) 구간에서 정의된 함수 $f(x)$가 증가함수라는 것은 $x_1 < x_2$를 만족하는 구간 내의 임의의 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$가 성립하는 것이다. 함수 $f(x)$가 연속인 증가함수인 경우 역함수 $f^{-1}(y)$가 존재하며 이 함수는 연속인 증가함수이다. 양의 실수 c에 대하여 폐구간 $[0, c]$에서 정의된 $f(0) = 0$이고 연속인 증가함수 $f(x)$가 주어졌다고 하자.



이제 $0<a<c$, $0<b<f(c)$인 a, b에 대하여 정적분 $\int_0^a f(x)\,dx$는 $x=0$부터 $x=a$까지 곡선 $y=f(x)$ 아래의 넓이를 의미하고 $\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$는 $y=0$부터 $y=b$까지 곡선의 왼쪽 부분의 넓이를 의미하므로 그림으로부터 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

(ㄱ)	$ab \le \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$

이 부등식의 등호는 정확히 $b=f(a)$일 때 성립한다. 이 부등식을 영(Young)의 부등식이라고 한다.

예제 3. 음이 아닌 실수들의 집합에서 음이 아닌 실수들의 집합으로의 함수 $f_1(x)=e^x-1$ 를 생각해보자. 이 함수의 역함수는 $f_1^{-1}(y)=\ln(1+y)$ 로 주어진다. 양수 a, b 에 대하여 $\int_0^a (e^x-1)\,dx = e^a-a-1$, 그리고 부분적분법에 의하여 $\int_0^b \ln(1+y)\,dy=(1+b)\ln(1+b)-b$ 이 성립하므로, 영의 부등식을 적용하여 아래 부등식을 얻는다.

$$ab \le e^a+(1+b)\ln(1+b)-a-b-1$$

단, 등호는 $b=e^a-1$ 일 때 성립한다.

예제 4. 적당한 양의 실수 m에 대하여 함수 $f_2(x)=x^m$에 영의 부등식을 적용하고 수식을 변형하면 임의의 양의 실수 a, b 에 대하여 아래의 부등식을 얻는다.

$$ab \le \frac{2}{3}a^{3/2} + \frac{1}{3}b^3$$

예제 5. 양의 실수 전체에서 정의된 함수 $f_3(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$는 0에서의 함숫값이 0 이고 연속인 증가함수이다. 이 함수의 역함수를 구하여 영의 부등식을 적용하면 적당한 실수 p, q, r, s, t에 대하여 아래의 부등식을 얻는다.

(ㄴ) $$ab \le pe^a + qe^{-a} + rb\ln\left(b + \sqrt{b^2+1}\right) + s\sqrt{1+b^2} + t$$

[문제 2-1] (10 점) 제시문의 그림은 $b < f(a)$인 경우를 직관적으로 나타낸다. 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(y)$가 모두 미분가능이라고 가정하고, $b > f(a)$인 경우 영의 부등식 (ㄱ)을 부분적분법을 이용하여 증명하라.

[문제 2-2] (10 점) 폐구간 $[2,5]$에서 정의된 연속인 증가함수 $f(x)$에 대하여 $f(2) = 3$, $f(5) = 17$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 29$ 일 때 $\int_3^{17} f^{-1}(y)\,dy$의 값은 얼마인가?

[문제 2-3] (10 점) 예제 4를 m을 적절히 선택하여 증명하고, 등호가 성립하기 위한 필요충분조건을 제시하라.

[문제 2-4] (10 점) 예제 5의 함수 $f_3(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$의 역함수를 구하라.

[문제 2-5] (10 점) 예제 5의 (ㄴ) 부등식의 상수 p, q, r, s, t를 등호가 성립하는 경우가 생기도록 정하라.