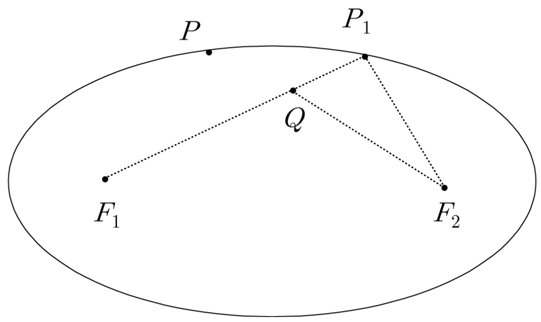
자연계열

2013학년도 수시2차 논술고사 예시답안

[문제 1-1]

1) 선분 F_1Q를 Q쪽으로 연장하여 타원과 만나는 점을 P_1이라 하면



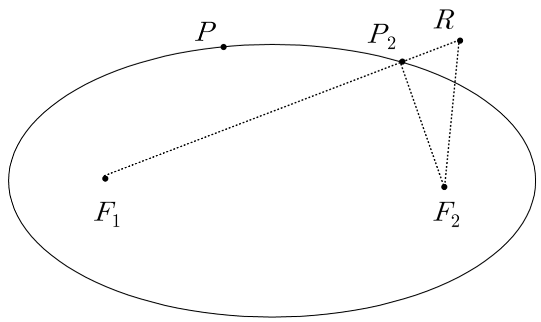
$\triangle P_1QF_2$에서 $\overline{QF_2} < \overline{QP_1} + \overline{P_1F_2}$이므로,

$\overline{F_1Q} + \overline{QF_2} < \overline{F_1Q} + \overline{QP_1} + \overline{P_1F_2} = \overline{F_1P_1} + \overline{P_1F_2}$

그런데, P_1과 P가 타원 위에 있으므로 $\overline{F_1P_1} + \overline{P_1F_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$이다.

따라서, $\overline{F_1Q} + \overline{QF_2} < \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$

2) 선분 F_1R이 타원과 만나는 점을 P_2라 하면



$\triangle P_2F_2R$에서 $\overline{P_2F_2} < \overline{P_2R} + \overline{RF_2}$이므로,

$\overline{F_1P_2} + \overline{P_2F_2} < \overline{F_1P_2} + \overline{P_2R} + \overline{RF_2} = \overline{F_1R} + \overline{RF_2}$

그런데, P_2과 P가 타원 위에 있으므로 $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \overline{F_1P_2} + \overline{P_2F_2}$이다.

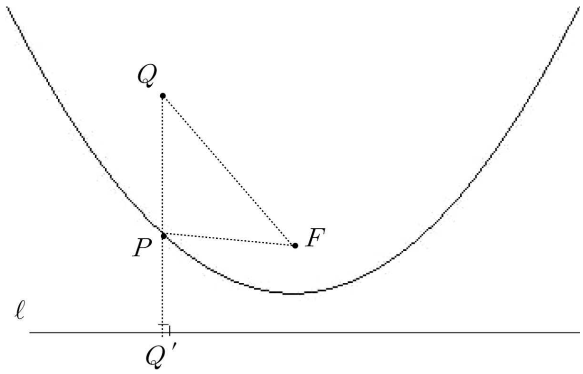
따라서, $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} < \overline{F_1R} + \overline{RF_2}$

[문제 1-2]

접선 ℓ 위에서 P와 다른 임의의 점 X를 잡자. X는 타원 밖에 위치하므로, [문제 1-1]에 의해 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}<\overline{F_1X}+\overline{XF_2}$가 된다. 이것은 F_1에서 ℓ 위의 한 점을 거쳐 F_2에 이르는 최단경로가 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}$임을 뜻한다. 따라서 제시문 (나)에 의해 $\angle F_1PQ=\angle F_2PR$이다.

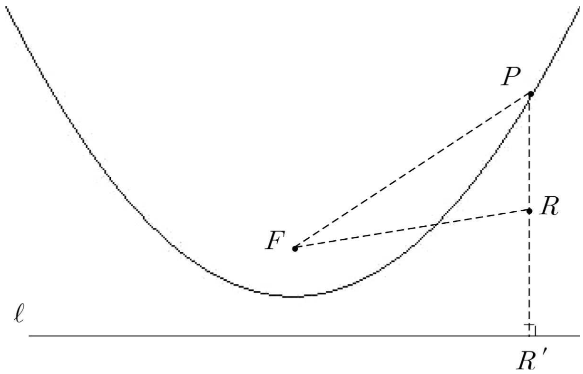
[문제 1-3]

1) 선분 QQ'이 포물선과 만나는 점을 P라 하면



$\triangle PQR$에서 $\overline{FQ}<\overline{QP}+\overline{PF}$이다. 그런데 P가 포물선 위에 있으므로 $\overline{PF}=\overline{PQ'}$이다.
따라서 $\overline{FQ}<\overline{QP}+\overline{PQ'}=\overline{QQ'}$

2) 직선 RR'이 포물선과 만나는 점을 P라 하면

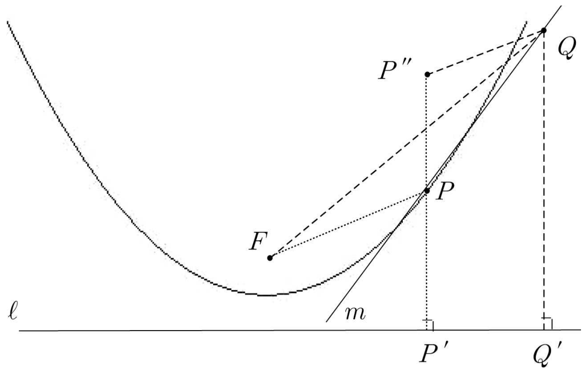


$\triangle FRP$에서 $\overline{FR}<\overline{FP}-\overline{PR}$이다. 그런데 P가 포물선 위에 있으므로 $\overline{FP}=\overline{PR'}$이다.
따라서 $\overline{FR}>\overline{PR'}-\overline{PR}=\overline{RR'}$

[문제 1-4]

선분 PP'을 P 쪽으로 연장하여 한 점 P''을 잡자. 제시문 (나)를 이용하기 위해 접선 m 위에 P와 다른 임의의 한 점 Q를 잡고 Q에서 ℓ에 내린 수선의 발을 Q'이라 하고, $\overline{FR}+\overline{PP''} < \overline{FQ}=\overline{QP''}$임을 보이자.

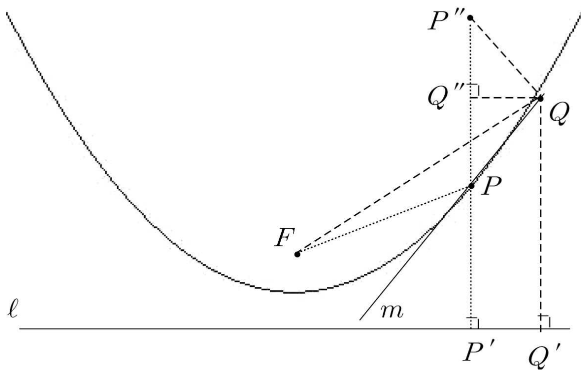
① $\overline{QQ'} \geq \overline{P''P'}$일 때:



Q가 포물선 밖에 있으므로 [문제 1-3]에 의해 $\overline{FQ} > \overline{QQ'}$. 그러므로

$$\overline{FP}+\overline{PP''}=\overline{PP'}+\overline{PP''}=P''P' \leq \overline{QQ'} < \overline{FQ} < \overline{FQ}+\overline{QP''}$$

② $\overline{QQ'} < \overline{P''P'}$일 때: Q에서 선분 $P''P'$에 낼ㄴ 수선의 발을 Q''이라 하면,



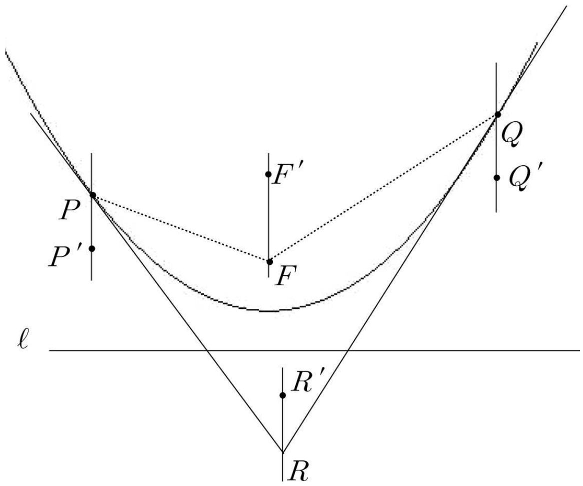
직각삼각형 $P''Q''Q$에서 $\overline{P''Q''} < \overline{QP''}$이고 Q가 포물선 밖에 있으므로 [문제 1-3]에 의해 $\overline{FQ} > \overline{QQ'}$이므로

$$\overline{FP}+\overline{PP''}=\overline{PP'}+\overline{PP''}=\overline{P''P'}=\overline{P''Q''}+\overline{Q''P'} < \overline{QP''}+\overline{QQ'} < \overline{QP''}+\overline{FQ}$$

따라서 $\overline{FP}+\overline{PP''}$는 F에서 m을 거쳐 P''에 이르는 최단거리이므로, 제시문 (나)에 의해 m에 대해 선분 FP와 선분 $P''P$가 이루는 각이 같다. 그런데 m에 대해 선분 $P''P$와 선분 PP'이 이루는 각이 맞꼭지각으로 같으므로, m은 $\angle FPP'$을 이등분한다.

[문제 1-5]

점 F, P, Q, R을 지나고 준선에 수직인 직선들 위에서 그림과 같이 F', P', Q', R'을 잡자.



그러면 $\angle FPP' = \angle PFF'$, $\angle FQQ' = \angle QFF'$이고, $\angle PRR' = \angle P'PR$, $\angle QRR' = \angle Q'QR$ 이다. 그런데 $\angle P'PR = \frac{1}{2}\angle FPP'$, $\angle Q'QR = \frac{1}{2}\angle FQQ'$이므로

$$\begin{aligned}\angle PRQ &= \angle PRR' + \angle QRR' = \angle P'PR + \angle Q'QR \\ &= \frac{1}{2}(\angle FPP' + \angle FQQ') = \frac{1}{2}(\angle PFF' + \angle QFF') \\ &= \frac{1}{2}\angle PFQ = 52.5^\circ\end{aligned}$$

[문제 2-1]

점화식으로부터 일반항은 0이 될 수 없음을 알 수 있다. 점화식의 양변을 $a_n a_{n+1}$으로 나누면 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2^n + 3^n$을 얻는다. 즉, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 계차수열의 일반항을 얻는다.

제시문 (가)에 따라 $n \geq 2$에 대하여

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k + 3^k) = 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = 2^n + \frac{3^n}{2} - \frac{5}{2}$$

즉 $a_n = \dfrac{2}{2^{n+1} + 3^n - 5}$ 를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{2^{n+3}+3^{n+2}-5}}{\dfrac{2}{2^{n+1}+3^n-5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n-5}{2^{n+3}+3^{n+2}-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 - \left(\frac{5}{3^n}\right)}{8\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9 - \left(\frac{5}{3^n}\right)} = \frac{1}{9}$$

[문제 2-2]

피보나치 수열의 점화식으로부터 $\dfrac{f_{n+1}}{f_n f_{n+2}} = \dfrac{f_{n+2}-f_n}{f_n f_{n+2}} = \dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f_{n+2}}$ 을 얻는다.

이로부터 주어진 무한급수의 부분합에 대한 다음 식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{k+1}}{f_k f_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{f_k} - \frac{1}{f_{k+2}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_3}\right) + \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f_{n+2}}\right) \\
&= \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+2}} = 2 - \frac{1}{f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+2}}
\end{aligned}
$$

점화식으로부터 $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$ 이고 무한급수의 합은 부분합의 극한이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$이다.

[문제 2-3]

문제 식의 좌변을 L, 우변을 R이라 하자. 제시문 (다) 비네의 공식을 이용하여 정리하면

$$
\begin{aligned}
(\beta-\alpha)^2 L &= \left(\beta^{k-1} - \alpha^{k-1}\right)\left(\beta^{2k} - \alpha^{2k}\right) - (\beta-\alpha)\left(\beta^k - \alpha^k\right) \\
&= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \alpha^{k-1}\beta^{k-1}\left(\beta^{k+1} + \alpha^{k+1}\right) - \beta^{k+1} - \alpha^{k+1} + \alpha\beta\left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

그리고

$$
\begin{aligned}
(\beta-\alpha)^2 R &= \left(\beta^k - \alpha^k\right)\left(\beta^{2k-1} - \alpha^{2k-1}\right) \\
&= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \alpha^k\beta^k\left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

한편, 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha\beta = -1$, 그리고 k는 짝수이므로

$\alpha^{k-1}\beta^{k-1} = -1$, $\alpha^k\beta^k = 1$이 각각 성립한다.

이를 이용하여 정리하면, 아래 식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
(\beta-\alpha)^2 L &= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} + \left(\beta^{k+1} + \alpha^{k+1}\right) - \left(\beta^{k+1} + \alpha^{k+1}\right) - \left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right) \\
&= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right) \\
(\beta-\alpha)^2 R &= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

두 식으로부터 $L = R$을 얻는다.

[문제 2-4]

1) 제시문 (라)에 의하면 황금비는 양수 a, b가 식 $\dfrac{(a+b)}{a} = \dfrac{a}{b}$를 만족할 때 $\dfrac{a}{b}$의 값이다.

$(a+b)b = a^2$에서 양변을 b^2으로 나누면 $\dfrac{a}{b} + 1 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$을 얻게 되어 황금비는

이차 방정식 $t^2 - t - 1 = 0$의 근임을 알 수 있다.

2) 이제 황금비를 φ라 하면, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$이 성립한다.

이 식의 양변을 φ로 나누면 $\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$을 얻게 된다. 즉, 황금비와 황금비의 역수의 차는 1이다.

따라서 황금비와 황금비의 역수의 소수점 이라 값은 일치한다.

[문제 2-5]

1) 정오각형의 한 각의 크기는 $180^\circ \bullet (5-2)/5 = 108^\circ$이다.

$\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\angle CAB = \angle BCA = (180^\circ - 108^\circ)/2 = 36^\circ$.

이로부터 $\angle ACD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$를 얻는다. 마찬가지로 $\angle ACD = 72^\circ$이다.

$\angle ACD$의 이등분선이 선분 AD와 만나는 점을 P라 하자. $\angle PCD$의 크기는 $72^\circ/2 = 36^\circ$이다.

따라서 $\triangle ACD$와 $\triangle CDP$는 닮음이다.

2) 선분 $\overline{AC}$의 길이를 x라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{AP} : \overline{PD} = x : 1$을 얻는다.

한편 $\overline{AP} + \overline{PD} = \overline{AD} = x$가 성립하므로 $\overline{PD} = \frac{x}{1+x}$를 얻는다,

닮은 삼각형의 성질로부터 $x : 1 = 1 : \frac{x}{1+x}$, 즉 $x^2 - x - 1 = 0$이 성립한다.

이 식을 풀면 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$를 얻는다.