2014 논술 및 심층면접 자료집

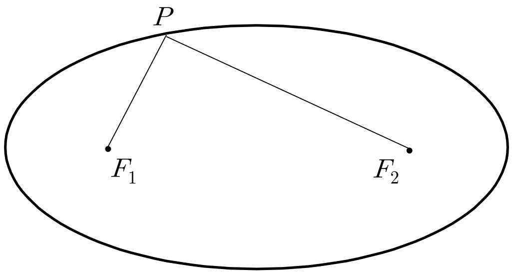
자연계열
2013학년도 수시2차 논술고사 기출문제

문제 1 (50점)

이차곡선

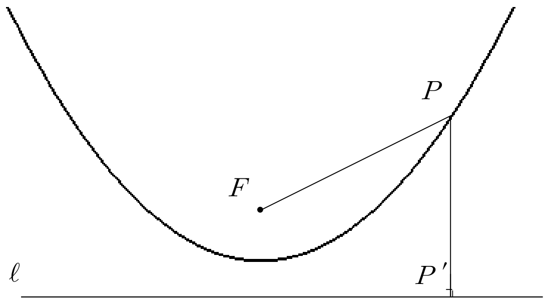
(가) 타원과 포물선은 이차곡선이다. 좌표평면에서 이 곡선들을 나타내는 방정식은 x, y에 관한 이차방정식이 된다. 원뿔을 다양한 각도의 평면으로 잘랐을 때에도 이 곡선들이 나타난다. 이차곡선에는 이 외에도 쌍곡선이 있다.
타원과 포물선의 기하학적인 정의는 다음과 같다.

타원: 두 정점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 두 정점을 이 타원의 <u>초점</u>이라 한다.



$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} =$ 일정
F_1, F_2 : 초점

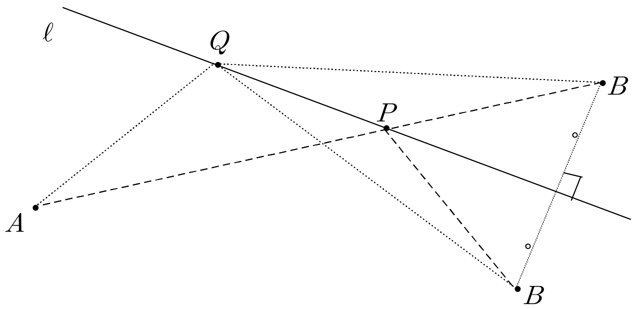
포물선: 한 정점과 한 정직선으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합을 포물선이라 하고, 정점과 정직선을 각각 포물선의 <u>초점</u>과 <u>준선</u>이라 한다.



$\overline{FP} = \overline{PP'}$
F : 초점, ℓ : 준선

이차곡선과 한 점에서 만나는 직선을 이 이차곡선의 접선이라고 한다. (단, 포물선의 경우에는 준선에 수직인 직선은 제외한다.) 이차곡선 위의 각 점마다 이 점을 지나는 유일한 접선이 존재한다.

(나) 한 직선이 있고, 그 직선에 대해 같은 쪽에 두 개의 점이 있다. 그 중 한 점으로부터 직선 위의 점을 거쳐 다른 점까지에 이르는 최단경로에 대해 생각해 보자. 이 최단경로를 구하는 방법은 다음과 같다.

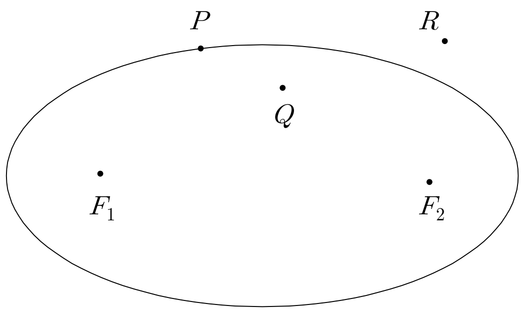


직선 ℓ과 이 직선에 대해 같은 쪽에 있는 두 점 A, B가 주어져 있다. 직선 ℓ에 대해 점 B와 대칭인 점을 B'이라 하고, 선분 AB'이 직선 ℓ과 만나는 점을 P라 하자. 그러면, A에서 P를 거쳐 B까지 가는 것이 구하는 최단경로가 된다. 이를 증명하기 위해 직선 ℓ 위의 임의의 점을 Q라 하면

$$\overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AQ} + \overline{QB'} > \overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB'} = \overline{AP} + \overline{PB}$$

이다. 따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$가 최단경로가 된다. 이때, 직선 ℓ에 대해 선분 AP가 이루는 각과 선분 BP가 이루는 각이 같아지는데, 그 이유는 직선 ℓ에 대해 선분 AP와 선분 $B'P$가 이루는 각이 맞꼭지각으로 같고, 직선 ℓ에 대해 선분 BP와 선분 $B'P$가 이루는 각이 대칭에 의해 같기 때문이다.

[문제 1-1] (10점) 그림과 같이 초점이 F_1, F_2인 타원이 있다. 이 타원에 대해 세 점 P, Q, R이 각각 타원 위, 내부, 그리고 외부에 위치하고 있다.

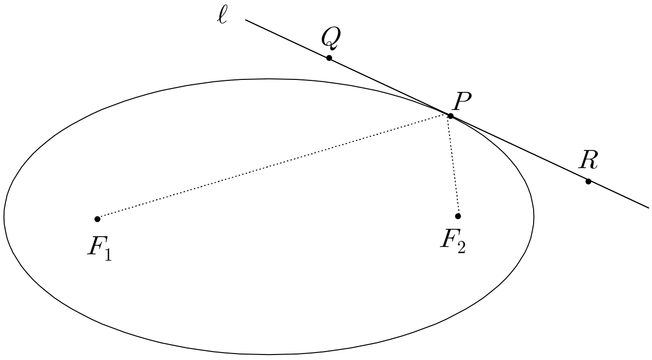


이때,

$$\overline{F_1Q} + \overline{QF_2} < \overline{F_1P} + \overline{PF_2} < \overline{F_1R} + \overline{RF_2}$$

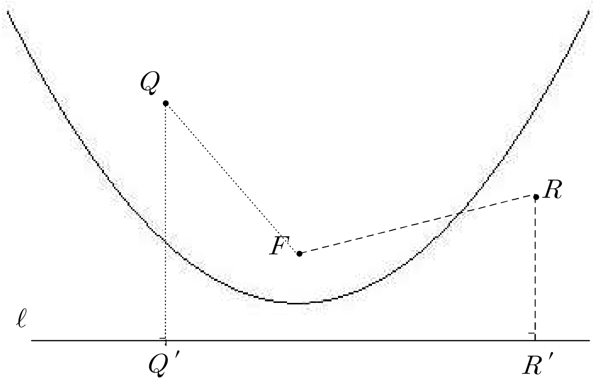
임을 보여라.

[문제 1-2] (10점) 그림과 같이 초점이 F_1, F_2인 타원 위의 한 점 P에서의 접선 ℓ이 있다.



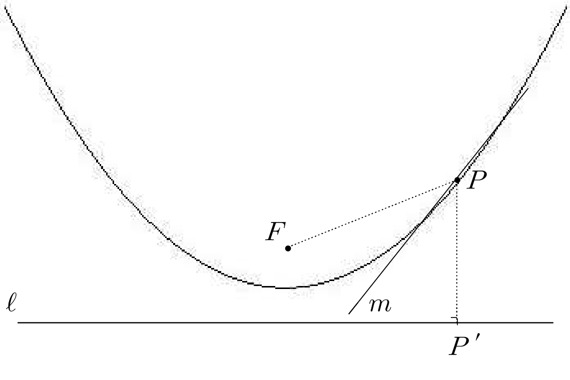
직선 ℓ 위에 두 점 Q, R이 P에 대하여 서로 반대편에 위치하고 있다. [문제 1-1]과 제시문을 이용하여 $\angle F_1PQ = \angle F_2PR$임을 보여라.

[문제 1-3] (10점) 그림과 같이 초점과 준선이 각각 F, ℓ인 포물선이 있다. 이 포물선에 대해 두 점 Q, R이 각각 포물선의 안과 바깥에 위치하고 있다.



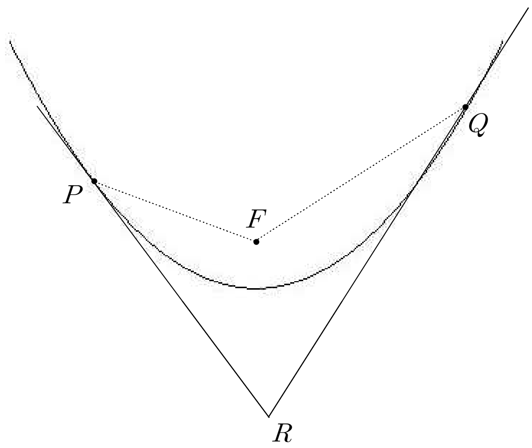
Q'과 R'이 각각 Q와 R에서 직선 ℓ에 내린 수선의 발일 때, $\overline{FQ} < \overline{QQ'}$이고 $\overline{FR} > \overline{RR'}$임을 보여라.

[문제 1-4] (10점) 그림과 같이 초점과 준선이 각각 F, ℓ인 포물선이 있다.



포물선 위의 한 점 P에서 그은 접선이 m이고, P에서 ℓ에 내린 수선의 발을 P'이라 할 때, 접선 m은 $\angle FPP'$을 이등분함을 보여라.

[문제 1-5] (10점) 그림과 같이 초점이 F인 포물선 위의 두 점 P, Q에서 각각 그은 접선이 점 R에서 만난다.



$\angle PFQ = 105^\circ$ 일 때 $\angle PRQ$의 크기를 구하라.

문제 2 (50점)

(가) 수열 $\{a_n\}$에서 이웃하는 두 항의 차

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 이루어진 수열 $\{b_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라고 한다. 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있다. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면, 정의로부터

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 \\ b_2 &= a_3 - a_2 \\ b_3 &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= a_n - a_{n-1} \end{aligned}$$

이므로 위의 $(n-1)$개의 등식을 더하면 $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = a_n - a_1$ 이다. 따라서 다음 식을 얻는다.

$$\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (\text{단, } n \geq 2)}$$

(나) 중세 이탈리아의 수학자 피보나치는 그의 저서에서 (생물학적으로 비현실적이지만) 이상적인 토끼의 개체 수 변화를 생각하였다. 한 쌍의 새끼 토끼가 한 달이 되면 성숙하여 다음

달부터 매월 한 쌍의 새끼를 낳는다. 또, 새로 태어난 한 쌍의 토끼도 한 달이 지나면 성숙하여 그 다음 달부터 매월 한 쌍의 새끼를 낳는다. 이와 같은 식으로 계속해 갈 때, 제 n월 전체 토끼의 쌍의 수를 f_n이라 하자. 제 $(n+2)$월 성숙한 토끼의 쌍의 수는 제 $(n+1)$월 전체 토끼의 쌍의 수와 같고, 새끼 토끼 쌍의 수는 제 n월 전체 토끼의 쌍의 수와 같으므로 수열 $\{f_n\}$은 아래 식들을 만족하게 된다.

(ㄱ)	$f_1=1,\ f_2=1$
(ㄴ)	$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \quad (n \ge 1)$

이와 같이 정의된 수열 $\{f_n\}$을 피보나치(Fibonacci) 수열이라 한다.

(다) 피보나치 수열의 일반항은 간단히 표현할 수 있다. 이 공식은 드 므와브르(De Moivre)에 의하여 처음으로 발견되었지만 비네(Binet)의 공식으로 더 잘 알려져 있다. 점화식으로부터 비네의 공식을 얻는 과정을 알아보자. 우선 점화식 (ㄴ)을

$$\boxed{f_{n+2}-\alpha f_{n+1}=\beta(f_{n+1}-\alpha f_n)}$$

으로 바꾸어 적는다. 이렇게 변형하기 위해서는 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$을 만족하는 두 수 $\alpha,\ \beta$를 구해야 한다. 즉, $\alpha,\ \beta$는 t에 관한 이차방정식 $t^2-t-1=0$의 두 근이다. 따라서 수열 $\{f_{n+1}-\alpha f_n\}$ 은 첫째항이 $f_2-\alpha f_1=1-\alpha=\beta$ 이고 공비가 β인 등비수열이므로 $f_{n+1}-\alpha f_n=\beta^n \quad (n \ge 1)$을 얻는다. 이 식의 양변을 α^{n+1}로 나누면 $\dfrac{f_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\dfrac{f_n}{\alpha^n}=\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n$이므로 수열 $\left\{\dfrac{f_n}{\alpha^n}\right\}$의 계차수열을 얻는다. 계차수열로부터 원래 수열의 일반항을 구하는 공식을 적용하면 $n \ge 2$에 대한 아래 식을 얻는다.

$$\frac{f_n}{\alpha^n}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k=\frac{1}{\alpha}+\frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\frac{\beta}{\alpha}-1}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}-1\right)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n-1\right)$$

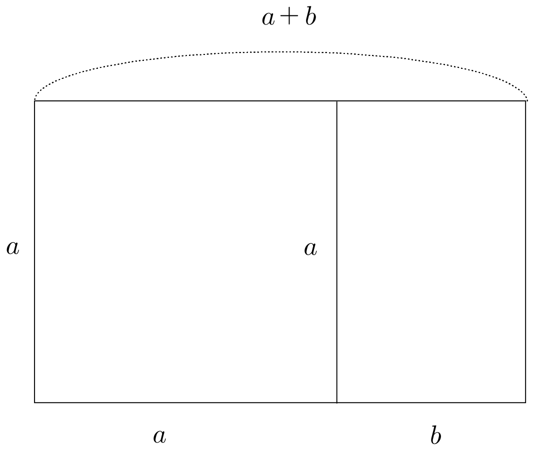
이제 이 식의 양변에 α^n을 곱하여 피보나치 수열의 일반항에 관한 비네의 공식을 얻게 된다.

$$\boxed{f_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\beta^n-\alpha^n\right)}$$

비네의 공식은 피보나치 수열과 관련된 여러 식을 증명할 때 유용하다. 예를 들어, 비네의 공식으로부터 다음 극한 공식을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(라) 두 양수 a, b (단, $a > b$)가 황금비(golden ratio)를 이룬다는 것은 큰 수에 대한 두 수의 합의 비가 작은 수에 대한 큰 수의 비와 같을 때이다. 아래 그림은 이와 같은 관계를 잘 나타낸다.



이를 수식으로 표현하면 $(a+b):a = a:b$, 즉 $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$가 성립한다. 이때 $\frac{a}{b}$를 황금비라고 한다. 황금삼각형(golden triangle)이라 부르는 특별한 형태의 이등변삼각형이 있다. 이 이등변삼각형은, 한 밑각의 이등분선이 만드는 두 작은 삼각형 중 하나와 닮은꼴이다. 황금삼각형은 황금비와 깊은 관련이 있다.

[문제 2-1] (10점) $a_1 = 1$, $(2^n + 3^n)a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ $(n \geq 1)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n}$을 구하라.

[문제 2-2] (10점) 피보나치 수열 $\{f_n\}$에 대하여, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n f_{n+2}}$ 의 합을 구하라.

[문제 2-3] (10점) 2 이상의 모든 짝수 k에 대하여 아래 식이 성립함을 보여라.

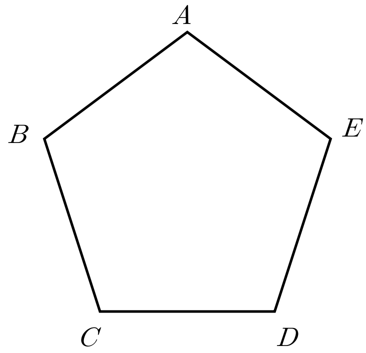
$$\boxed{f_{k-1} f_{2k} - f_k = f_k f_{2k-1}}$$

[문제 2-4] (10점) 제시문의 내용을 바탕으로 다음 질문에 답하라.

1) 황금비가 만족하는 정수 계수의 이차방정식을 유도하라.

2) 문항 1)에서 구한 방정식을 이용하여 황금비와 황금비의 역수는 소수점 이하의 값이 일치함을 보여라.

[문제 2-5] (10점) 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 $ABCDE$가 있다.



1) 세 꼭짓점으로 이루어진 삼각형 ACD가 황금삼각형임을 보여라.

2) 선분 $\overline{AC}$의 길이를 구하라.