2013학년도 아주대학교 수시2차 논술 예시답안

[문제 1-1] $\theta\phi$-좌표가 (θ,ϕ)인 점 P의 xy-좌표를 (x,y)라 하자.

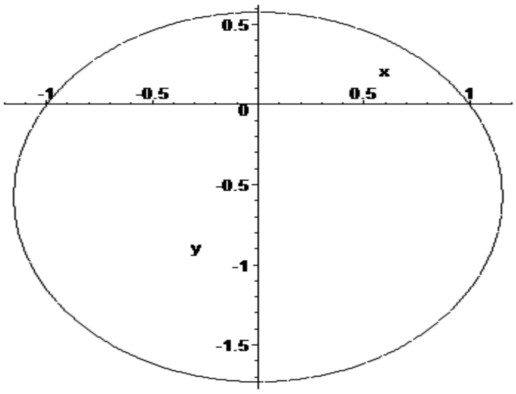
그러면, $\tan\theta=\dfrac{y}{1+x}$이고 $\tan\phi=\dfrac{y}{1-x}$이다. 따라서 $\lambda=\dfrac{1+x}{y}$이고, $\mu=\dfrac{1-x}{y}$이다.

[문제 1-2] 방정식 $\theta+\phi=\dfrac{\pi}{3}$의 양변에 $\tan$를 취하면

$$\begin{aligned}\sqrt{3}&=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}\\&=\frac{\dfrac{y}{1+x}+\dfrac{y}{1-x}}{1-\dfrac{y}{1+x}\dfrac{y}{1-x}}=\frac{2y}{1-x^2-y^2}\end{aligned}$$

이다. 이것을 다시 정리하면, $x^2+\left(y+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{4}{3}$이다. 따라서 주어진 방정식의 그래프는

중심이 $\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$이고, 반지름이 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$인 원이다.



[문제 1-3] 점 P의 xy-좌표를 (x_1,y_1)이라 하면,

$$2=\frac{1+x_1}{y_1},\quad 1=\frac{1-x_1}{y_1}$$

이고, 이것을 풀면 $(x_1,y_1)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$이다. 같은 식으로 점 Q의 xy-좌표를 (x_2,y_2)라 하면,

$$3=\frac{1+x_2}{y_2},\quad -1=\frac{1-x_2}{y_2}$$

이고, 이것을 풀면 $(x_2,y_2)=(2,1)$이다. 따라서

$$PQ=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2+\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{3}$$

[문제 1-4] 주어진 직선의 xy-좌표에 의한 방정식은

(1) $y = 2x + 1$

이다. 그런데,

$$\lambda = \frac{1+x}{y}, \quad \mu = \frac{1-x}{y}$$

이므로 이것을 x, y에 대해 풀면

$$x = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}, \quad y = \frac{2}{\lambda + \mu}$$

이다. 이것을 식 (1)에 대입하여 정리하면,

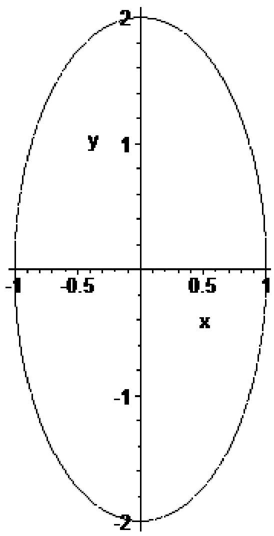
$$\frac{2}{\lambda + \mu} = \frac{2(\lambda - \mu)}{\lambda + \mu} + 1$$

$$2 = 2\lambda - 2\mu + \lambda + \mu$$

$$3\lambda - \mu = 2$$

이므로 구하는 방정식은 $3\lambda - \mu - 2 = 0$이다.

[문제 1-5] $\lambda = \dfrac{1+x}{y}$와 $\mu = \dfrac{1-x}{y}$를 주어진 방정식 $\lambda\mu = \dfrac{1}{4}$에 대입하면 $\dfrac{1-x^2}{y^2} = \dfrac{1}{4}$이고, 이것을 정리하면 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$이다. 따라서 주어진 방정식의 그래프는 타원이다.



[문제 2-1] (10 점) 중심의 좌표가 $3+i$이고 반지름 2인 원 위에서 움직이는 점의 좌표를 z라 할 때, 복소수 $z+\overline{z}$가 표시하는 도형은 무엇이지 밝혀라.

해답. $z=x+yi$라 하자. 그러면 $1 \leqq x \leqq 5$이다. $z+\overline{z}=2x$이므로 구하는 도형은 실축에서 좌표가 각각 2와 10인 점을 연결하는 선분이다.

[문제 2-2] (10 점) 부등식 $\frac{1}{2} \leqq Im\left(\frac{1}{z}\right) \leqq 1$이 나타내는 영역을 복소수 평면에 표시하라.

해답. $\frac{1}{z}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$이므로 오른쪽 부등식은 $\frac{-y}{x^2+y^2} \leqq 1$과 같다. 그런데 이것을 변형하면

$$x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \geqq \frac{1}{4}$$

이 된다. 왼쪽의 부등식도 유사하게 다루면,

$$x^2+(y+1)^2 \leqq 1$$

을 얻는다. 따라서 구하는 영역은 중심의 좌표가 $-\frac{1}{2}i$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원의 바깥이며 중심의 좌표가 $-i$이고 반지름이 1인 원의 안쪽이다. 단, 경계인 두 원을 포함한다.

[문제 2-3] (10 점) 복소수 평면에서 중심의 좌표가 1이고 반지름이 1인 원을 R이라 하자. 원 R 상의 점들의 좌표를 z라 할 때, 복소수 $w=(1+i)z+i$가 표시하는 점들은 복소수 평면에서 어떤 도형을 표시하는지 밝혀라.

해답. 원 R의 방정식은 $|z-1|=1$이다. $z=\frac{w-i}{1+i}$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$|w-1-2i|=\sqrt{2}$$

구하는 도형은 중심이 $1+2i$이고 반지름은 $\sqrt{2}$인 원이다.

[문제 2-4] (10 점) 복소수 $\alpha(\neq 0)$와 β는 주어졌다. 복소수 평면에 있는 임의의 다각형을 T라 하자. T 위의 점들의 좌표를 z라 할 때, 복소수 $\alpha z+\beta$가 표시하는 도형은 T와 닮은꼴임을 보여라.

해답. 다각형 T의 한 변을 ℓ이라 하자. ℓ을 연장한 직선이 원점을 지나지 않는 경우만 생각해도 충분하다. ℓ의 점들의 좌표를 z라 할 때, $|\alpha|z$가 표시하는 도형은 ℓ과 평행하고 길이가 $|\alpha|$배인 평행한 선분이다. T의 모든 변에 대하여 똑같은 논의를 적용할 수 있으므로 T의 점들의 좌표를 z라 할 때, $|\alpha|z$가 표시하는 도형 T'은 T와 닮은꼴이다. $\alpha z+\beta$가 표시하는 도형은 T'을 회전시키고 평행 이동시킨 것이므로 여전히 닮은꼴이다.

[문제 2-5] (10 점) 좌표가 $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$인 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 위의 점들의 복소수 좌표를 z라 할 때, 복소수 $w=\frac{1}{z}$이 나타내는 도형은 무엇인지 밝혀라.

해답. 주어진 네 점은 각각 $\frac{1-i}{2}$, $\frac{-1-i}{2}$, $\frac{-1+i}{2}$, $\frac{1+i}{2}$로 보내진다. 제시문의 예제 3과 같은 방법을 적용하면, 좌표 $-1+i$인 점과 좌표 $1+i$인 점을 연결하는 변의 자취는 좌표가 각각 $\frac{-1-i}{2}$와 $\frac{1-i}{2}$인 두 점을 지름의 양끝으로 하는 아래쪽 반원이다. 정사각형의 다른 변들에 대하여 같은 방법을 적용하면 구하는 자취는 4개의 반원이 이루는 도형임을 알 수 있다.