2013학년도
아주대학교 수시2차 논술 예시문제

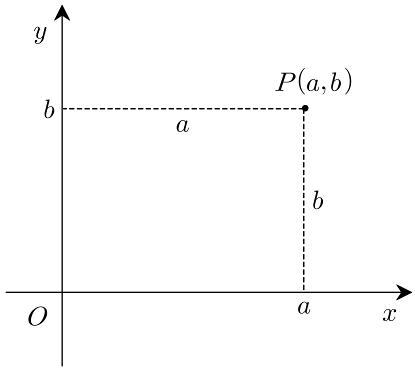
자연계열

성　　명	
전　　형	
수험번호	

문제 1 (50 점)

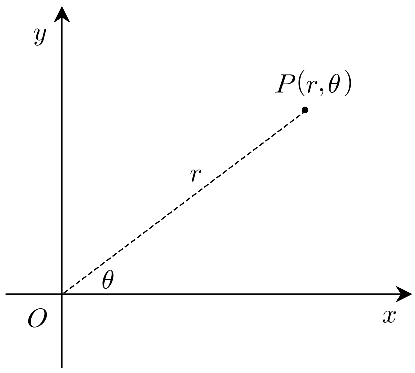
(가) 평면 위에 있는 점들의 위치를 나타내기 위해 일반적으로 사용하는 좌표에는 직교좌표(rectangular coordinates)와 극좌표(polar coordinates)가 있다.

직교좌표는 아래 그림과 같이 좌표축으로부터의 거리를 이용하여 나타낸다.



두 점 P, Q의 좌표가 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)일 때 피타고라스(Pythagoras)의 정리에 의해 P와 Q의 거리는 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 이 된다. 직교좌표를 이용하여 평면 위의 곡선들을 x와 y에 관한 방정식으로 나타낼 수 있다. 예를 들면, $ax + by + c = 0$은 직선의 방정식이고, 원점을 중심으로 하고 반지름이 a인 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = a^2$이다.

극좌표는 아래 그림과 같이 원점으로부터의 거리와 x축의 양의 방향으로부터의 편각을 이용하여 나타낸다.

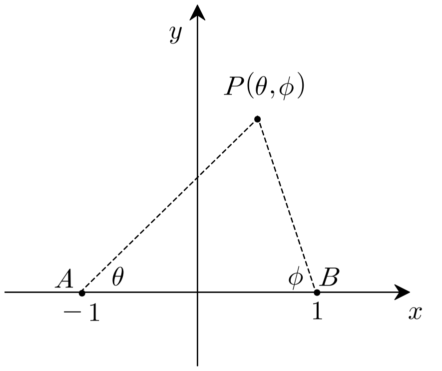


그러므로 점 P의 직교좌표가 (x, y)이고 극좌표가 (r, θ)이면, 정의에 의해 다음 관계식이 성립하게 된다.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta; \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

극좌표에 의한 방정식 $r = a$와 $\theta = b$는 각각 원점을 중심으로 하는 원과 원점을 지나는 직선을 나타내게 된다.

(나) 평면 위의 점의 위치를 나타내기 위한 또 다른 좌표로 양각좌표(biangular coordinates)가 있다. 양각좌표는 양극좌표(bipolar coordinates)라고도 하는데, 다음 그림과 같이 두 점 $A(-1,0)$과 $B(1,0)$을 고정하고 임의의 점 P의 좌표를 AP가 AB와 이루는 각을 AB로부터 반시계방향으로 측정한 값 θ와 BP가 AB와 이루는 각을 AB로부터 시계방향으로 측정한 값 ϕ에 의해 (θ,ϕ)로 나타낸다.



예를 들면, 방정식 $\theta=\phi$는 y축을 나타내게 된다. 종종 θ와 ϕ 대신에 $\lambda=\cot\theta$와 $\mu=\cot\phi$를 써서 (λ,μ)를 양각좌표라 하기도 한다. 양각좌표에 의한 방정식을 다룰 때에는 삼각함수에 대한 다음의 공식이 유용하다.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

다양한 좌표들을 함께 다룰 때에는 xy-좌표, $r\theta$-좌표, $\theta\phi$-좌표, $\lambda\mu$-좌표 등으로 부르기로 한다. $\lambda\mu$-좌표와 xy-좌표 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

(1) $\qquad \lambda=\dfrac{1+x}{y},\quad \mu=\dfrac{1-x}{y}$

[문제 1-1] (10 점) (나)의 식 (1)이 성립함을 보여라.

[문제 1-2] (10 점) 양각좌표에 의한 방정식 $\theta+\phi=\dfrac{\pi}{3}$가 나타내는 곡선이 원이 됨을 보여라.

[문제 1-3] (10 점) $\lambda\mu$-좌표가 각각 $(2,1)$와 $(3,-1)$인 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하라.

[문제 1-4] (10 점) xy-좌표가 각각 $(-1,-1)$과 $(1,3)$인 두 점을 지나는 직선의 $\lambda\mu$-좌표에 의한 방정식을 구하라.

[문제 1-5] (10 점) $\lambda\mu$-좌표에 의한 방정식 $\lambda\mu=\dfrac{1}{4}$의 그래프를 그려라.

문제 2 (50 점)

제곱해서 -1이 되는 수를 문자 i로 나타낸다. 즉, $i^2 = -1$이고 i를 **허수단위**라 한다. x, y가 실수일 때, $z = x + yi$ 꼴의 수를 **복소수**라 하고, x와 y를 각각 z의 **실수부**와 **허수부**라 한다. 기호로는 각각 $Re(z) = x$, $Im(z) = y$로 표시한다. 실수의 경우와 유사하게, 복소수에 대한 사칙연산이 가능하고 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙과 같은 연산의 기본법칙이 성립한다.

복소수 $z = x + yi$의 허수부의 부호를 바꾸어 얻어지는 복소수를 z의 **켤레복소수**라 하고 $\bar{z}$로 표시한다. 곧, $\bar{z} = x - yi$이다. 임의의 복소수 z_1, z_2에 대하여

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

가 성립한다.

복소수 $z = x + yi$를 평면에서 직교좌표가 (x,y)인 점에 대응시키면, 복소수들과 평면의 점들은 1대 1로 대응된다. 평면의 점의 좌표를 복소수로 나타낼 때, 이것을 **복소수 평면**이라 부른다. 복소수 평면의 가로축(x축)을 **실축**, 세로축(y축)을 **허축**이라 부른다. 복소수 z와 켤레복소수 $\bar{z}$가 표시하는 점은 실축에 대하여 대칭이다.

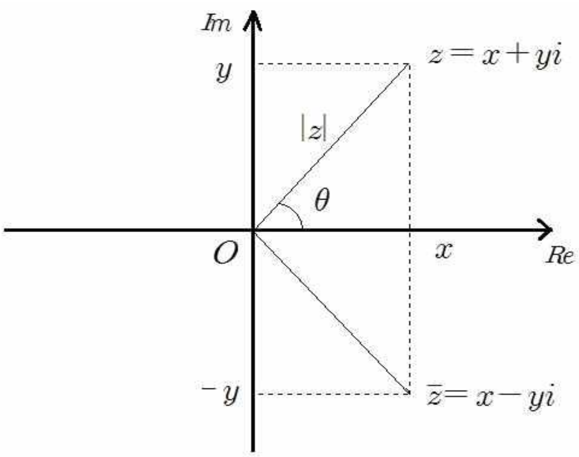


그림. 복소수의 표시

복소수 $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$에 대하여 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$가 성립하므로, 복소수 $z_1 + z_2$가 나타내는 점은 복소수 평면에서 z_1이 표시하는 점을 실축 방향으로 x_2만큼, 허축 방향으로 y_2만큼 평행이동한 점이다.

복소수 $z = x + yi$의 **크기**를 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$이라 정의한다. 그러면 $|z|^2 = z\bar{z}$이 성립하고, $|z|$는 복소수 평면에서 원점으로부터 좌표가 z인 점까지의 거리를 나타낸다. 일반적으로 두 개의 복소수 z와 w에 대하여 $|z - w|$는 좌표가 z와 w인 두 점 사이의 거리를 의미한다. 임의의 두 복소수 z_1과 z_2에 대하여 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$이 성립하고, 만일 $z_2 \neq 0$이면 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$이 성립한다.

예제 1. 복소수 방정식 $|z-i|=1$을 만족하는 z의 집합은 복소수 평면에서 중심의 좌표가 i이고 반지름이 1인 원을 나타낸다. 그리고 부등식 $|z-i| \leqq 1$을 만족하는 z의 집합은 이 원과 그 내부를 나타낸다.

복소수 평면의 양의 실축에서 좌표가 $z=x+yi$인 점까지 반시계방향의 각도를 θ라 하면(그림 참조), $x=|z|\cos\theta$, $y=|z|\sin\theta$이므로 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$이다. 이제 θ를 복소수 z의 **편각**이라 하고, $\arg(z)=\theta$로 쓴다. 편각은 유일하게 결정되지 않으며, 2π의 정수배 차이를 허용하기로 한다. 두 복소수 z_1과 z_2의 곱에 대하여 생각하자. 만일 $\arg(z_1)=\theta_1$, $\arg(z_2)=\theta_2$이면

$$\arg(z_1 z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$$

이 성립한다는 것은 알려진 사실이다. 그러므로 복소수 $z_1 z_2$는 복소수 평면에서 z_1이 표시하는 점에서 원점까지의 거리를 $|z_2|$배로 확장(또는 축소)시키고 각도 θ_2만큼 반시계방향으로 회전시킨 점을 표시한다.

예제 2. $|2i|=2$이고 $\arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}$이다. 따라서 복소수 z가 주어졌을 때, z가 표시하는 점을 반시계방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$ 회전시키고 그 크기를 두 배로 하면 $2iz$가 표시하는 점을 얻는다. 그리고 이것을 실축 방향으로 $+3$만큼 평행이동하면 복소수 $2iz+3$이 표시하는 점이 된다. 그러므로 복소수 z가 예제 1의 방정식 $|z-i|=1$을 만족할 때, $w=2iz+3$이 나타내는 점들은 중심의 좌표가 1이고 반지름이 2인 원에 있다.

예제 3. 복소수 평면에서 좌표 i인 점과 좌표 $1+i$인 점을 연결하는 선분을 L이라 하자. 즉, $L=\{x+i : 0 \leqq x \leqq 1\}$이다. 복소수 z가 선분 L 위를 움직일 때, $w=\dfrac{1}{z}$로 표현되는 복소수 w의 자취를 알아보자. 먼저 선분의 끝점들을 생각한다. $z=i$에 대응하는 점은 $\dfrac{1}{i}=-i$이고 $z=1+i$에 대응되는 점은 $\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$이다. 그런데 L은 제1사분면에 있고 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$이므로, w는 제4사분면에 있다. 따라서 w의 자취는 좌표가 $-i$인 점에서 좌표가 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$인 점을 연결하는 제4사분면의 곡선이다. 실제로

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+i}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{i}{x^2+1}$$

이므로 $u=Re(w)$, $v=Im(w)$라고 놓으면, $u^2+\left(v+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$임을 알 수 있다. 그러므로 구하는 자취는 중심의 좌표가 $-\dfrac{i}{2}$이고 반지름이 $\dfrac{1}{2}$인 원의 일부, 정확히 말하면 오른쪽 아래에 있는 4분원이다.

[문제 2-1] (10 점) 중심의 좌표가 $3+i$이고 반지름 2인 원 위에서 움직이는 점의 좌표를 z라 할 때, 복소수 $z+\overline{z}$가 표시하는 도형은 무엇인지 밝혀라.

[문제 2-2] (10 점) 부등식 $\frac{1}{2} \leqq Im\left(\frac{1}{z}\right) \leqq 1$이 나타내는 영역을 복소수 평면에 표시하라.

[문제 2-3] (10 점) 복소수 평면에서 중심의 좌표가 1이고 반지름이 1인 원을 R이라 하자. 원 R 상의 점들의 좌표를 z라 할 때, 복소수 $w=(1+i)z+i$가 표시하는 점들은 복소수 평면에서 어떤 도형을 표시하는지 밝혀라.

[문제 2-4] (10 점) 복소수 $\alpha(\neq 0)$와 β는 주어졌다. 복소수 평면에 있는 임의의 다각형을 T라 하자. T 위의 점들의 좌표를 z라 할 때, 복소수 $\alpha z+\beta$가 표시하는 도형은 T와 닮은꼴임을 보여라.

[문제 2-5] (10 점) 좌표가 $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$인 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 위의 점들의 복소수 좌표를 z라 할 때, 복소수 $w=\frac{1}{z}$이 나타내는 도형은 무엇인지 밝혀라.