자연계열

2012학년도 수시2차 논술고사 답안 작성 사례

1번 문항

[문제 1-1]

제시문 (가)에 따라 선분 AB 위의 점 P에 대해 $P:(x,y,z) = tA(4,2,-1) + (1-t)B(-1,7,9) = (5t-1, 7-5t, 9-10t)$ 이다.
이때 $C(3,3,1)$ 에서 $x=3 \Rightarrow 5t-1=3 \rightarrow t=\frac{4}{5}$ $t=\frac{4}{5}$일때 $P:(3,3,1)$ 이므로 점 C는 선분 AB 위에 존재 이때 $0 \leq t \leq 1$ 이다.

[문제 1-2]

제시문 (가)에 따라 선분 PQ 위의 점 R에 대해 $R:(x,y,z) = tP(1,1,1) + (1-t)Q(2,-1,3) = (2-t, -1+2t, 3-2t)$ 이다.
이를 평면 ~~P~~ $2x-y+z=3$ 에 대입하면 $2(2-t)-(-1+2t)+3-2t=3 \Rightarrow t=\frac{5}{6}$ 따라서 선분 PQ와 평면 $2x-y+z=3$은 $t=\frac{5}{6}$ 일때 $R:\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 에서 만난다. 이때 $0 \leq t \leq 1$ 이다.

[문제 1-3]

점 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{12}\right)$, 점 B는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{12}\right)$ 는 각각 $0<\frac{1}{2}, \frac{3}{2}<2$ 이고 $0<\frac{7}{12}<\frac{3}{5}$, $0<\frac{1}{12}<\frac{1}{7}$ 이므로
$A \in S$, $B \in S$ 이다. 선분 AB위의 점 $P(x,y) = tA+(1-t)B$ 이고 $t=\frac{1}{2}$ 일때 ~~$P(1, \frac{2}{3})$~~ $P\left(1, \frac{1}{3}\right)$ 이다.
이때 $\frac{1}{3} = \frac{2-1}{2+1}$ 이므로 $P \notin S$ 이다. 제시문 (나)의 정의에서 $t=\frac{1}{2}$일때 $P \notin S$ 이므로 S는 볼록집합이 아니다

[문제 1-4]

선분 AB 위의 점 $P(x_1, y_1, z_1) = t_1A + (1-t_1)B = (1+t_1, 3-4t_1, -1+2t_1)$ 선분 CD 위의 점 $Q(x_2, y_2, z_2) = t_2C + (1-t_2)D = (-1+4t_2, 2-t_2, 1+t_2)$ 이때, y좌표, z좌표 각 식 $3-4t_1 = 2-t_2$, $-1+2t_1 = 1+t_2$ 으로 동일할 때 $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = -3$ 이 된다. 이때 A의 x좌표는 $1+t_1 = \frac{1}{2}$ B의 x좌표는 $1+4t_2 = -11$ 으로 $1+t_1 \neq 1+4t_2$ 이다. 따라서 선분 AB 와 선분 CD는 만날수 없다.

[문제 1-5]

집합 T에 속하는 두점 A, B $A=(x_1, y_1, z_1)$, $B=(x_2, y_2, z_2)$ 에 대해 $x_1^2+y_1^2+z_1^2<1$, $x_2^2+y_2^2+z_2^2<1$ 이고 Schwarz 부등식 (4)에 의해 $(1^2+1^2+1^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2) \geq (x_1+y_1+z_1)^2$,
$(x_2+y_2+z_2)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) < 3$ 성립 이때 $t|x_1+y_1+z_1| < \sqrt{3}t$, $(1-t)|x_2+y_2+z_2| < \sqrt{3}(1-t)$ 이다. 점 선분 AB 위의 점 $P(x,y,z) = tA+(1-t)B = (tx_1+(1-t)x_2, ty_1+(1-t)y_2, tz_1+(1-t)z_2)$ 라 하자 $(0 \leq t \leq 1)$
이때 $|tx_1+(1-t)x_2+ty_1+(1-t)y_2+tz_1+(1-t)z_2| \leq t|x_1+y_1+z_1| + (1-t)|x_2+y_2+z_2| < \sqrt{3}(1-t+t) = \sqrt{3}$ 이다.
Schwarz 부등식 (4) 에 의해 $|x+y+z| < \sqrt{3}$ 성립
이때 $x^2+y^2+z^2 = t^2(x_1^2+y_1^2+z_1^2) + (1-t)^2(x_2^2+y_2^2+z_2^2) + 2t(1-t)(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$
이때 $|tx_1, (1-t)x_2, ty_1, (1-t)y_2, tz_1, (1-t)z_2| < 1$ 이므로 ~~$2t(1-t)(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$~~
$2t(1-t)x_1x_2 \leq 2t(1-t)|x|$, $2t(1-t)y_1y_2 \leq 2t(1-t)|y|$, $2t(1-t)z_1z_2 \leq 2t(1-t)|z|$ 이다.
따라서 $2t(1-t)(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2) \leq 2t(1-t)|x+y+z| < 2t(1-t)\sqrt{3}$ 이다. ---①

따라서 $x^2+y^2+z^2 < \sqrt{3}(t^2+(1-t)^2+2t(1-t)) = \sqrt{3}(t+(1-t))^2 = \sqrt{3}$ 이다.
따라서 $P \in T$ 성립 $\Rightarrow$ 제시문 (나)의 정의에 따라 T는 볼록집합 이다.

(부연설명을 하면 $0 \leq |x_1| \leq |x_2| < 1$ 일때 $|x_1x_2| \leq |x_1| \leq |t|x_1| + (1-t)|x_2||$ 이고, y, z 에 대해서도 성립.
따라서 $|x+y+z| \leq t(|x_1|+|y_1|+|z_1|) + (1-t)(|x_2|+|y_2|+|z_2|) < \sqrt{3}$ 이므로 식 ① 이 성립한다.

이 줄 밑에는 답안 작성을 하지 말 것

2번 문항

~~함수 f(x)~~ [문제 2-1]

함수 $f(x)=x\ln x$ 에 대해 $f'(x)=\ln x+1$ $f''(x)=\frac{1}{x}$ 이다. $x>0$ 일때 $f''(x)>0$ 이므로 $f(x)$는 아래로 볼록 함수 이다 정리 2 에서 $t_1=t_2=t_3=t_4=\frac{1}{4}$ $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$, $x_4=d$ 라 하면 $(n=4)$

$f(\frac{1}{4}(a+b+c+d)) \le \frac{1}{4}(f(a)+f(b)+f(c)+f(d)) \Rightarrow f(\frac{1}{4}) \le \frac{1}{4}(a\ln a+b\ln b+c\ln c+d\ln d)$ 이다.

이때 $a=b=c=d=\frac{1}{4}$ 이면 $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}(a\ln a+b\ln b+c\ln c+d\ln d)$ 이므로 최솟값은

$a\ln a+b\ln b+c\ln c+d\ln d=4f(\frac{1}{4})=-2\ln 2$ 이다.

[문제 2-2]

함수 $f(x)=\ln\sin x$ 라 정의하자 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일때 $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$, $f''(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}<0$ 이다. 정리 4-(b) ~~에~~에 따라 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $f(x)$ 위로 볼록이다. 정리 3 에서 $t_1=t_2=t_3=\frac{1}{3}$ ~~라 하고~~, $x_1=A$, $x_2=B$, $x_3=C$ 라 하자 $(n=3)$ 식 $f(\frac{1}{3}(A+B+C)) \ge \frac{1}{3}(f(A)+f(B)+f(C))$ 성립

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{3})=\ln(\frac{\sqrt{3}}{2}) \ge \frac{1}{3}(\ln\sin A\sin B\sin C) \Rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^3=\frac{3\sqrt{3}}{8} \ge \sin A\sin B\sin C$ 성립 이때 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 이면 $\sin A\sin B\sin C=(\frac{\sqrt{3}}{2})^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 으로 등호 성립 여기서 $A+B+C=\pi$, $A, B, C>0$ 성립한다.

[문제 2-3]

함수 $f(x)=x^{\frac{r}{t}}$ 이다. $x>0$ 일때 $f(x)$는 위로 볼록이다. 따라서 제시문의 정리 3 에서 $t_1=t_2=\cdots=t_n=\frac{1}{n}$, $a_1^t=x_1$, $a_2^t=x_2$, $\cdots$, $a_n^t=x_n$ 이라 하자 식 $\frac{1}{n}(f(a_1^t)+f(a_2^t)+\cdots+f(a_n^t)) \le f(\frac{1}{n}(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t))$ 성립한다.

$\Rightarrow \frac{1}{n}(f(a_1^t)+f(a_2^t)+\cdots+f(a_n^t))=\frac{1}{n}(a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r) \le f(\frac{1}{n}(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t))=(\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}{n})^{\frac{r}{t}}$

$\Rightarrow (\frac{1}{n}(a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r))^{\frac{1}{r}} \le (\frac{1}{n}(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t))^{\frac{1}{t}}$

$\Rightarrow S_r \le S_t$ 이다. 따라서 $r<t$ 이면 $f(x)=x^{\frac{r}{t}}$ 는 $x>0$ 에서 위로볼록 $\Rightarrow S_r \le S_t$ 이다.

[문제 2-4]

$f(x)=(x^2+\frac{1}{x^2})^5$ 라 하자 $f'(x)=5(x^2+\frac{1}{x^2})^4(2x-\frac{2}{x^3})$, $f''(x)=20(x^2+\frac{1}{x^2})^3\times(2x-\frac{2}{x^3})^2+5(x^2+\frac{1}{x^2})^4\times(2+\frac{6}{x^4})$ 이다.

$x>0$ 일때 $f''(x)>0$ 이므로 $f(x)$는 아래로 볼록. 정리 2 에서 $t_1=t_2=\cdots=t_n=\frac{1}{n}$ 이라 하자

식 $f(\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n))=f(1) \le \frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$ 성립 이때 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 이면 조건 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ 이고 등식 $f(1)=\frac{1}{n}\cdot nf(1)$ 성립 따라서 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 일때

$(x_1^2+\frac{1}{x_1^2})^5+(x_2^2+\frac{1}{x_2^2})^5+\cdots+(x_n^2+\frac{1}{x_n^2})^5=nf(1)=2^5\cdot n$ 으로 최솟값 성립한다.

이 줄 밑에는 답안 작성을 하지 말 것