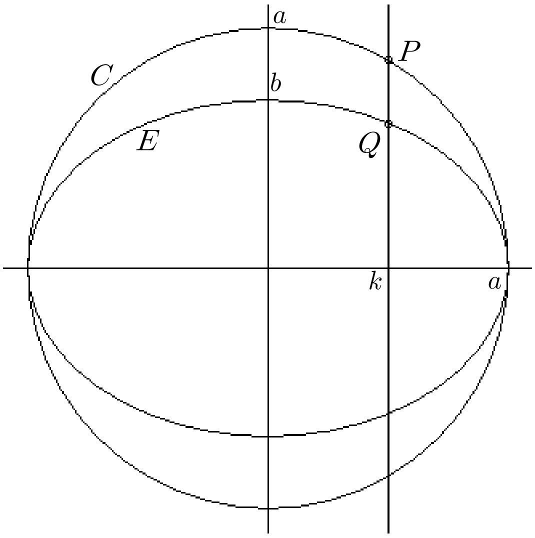
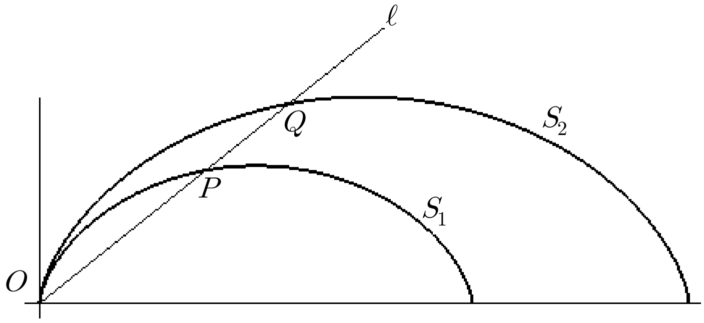
[문제 1-1] 문제의 원 C와 타원 E를 함께 좌표평면에 그리면 다음과 같다.



y-축에 나란한 직선 $x=k$가 원 C, 타원 E와 만나는 점을 그림과 같이 각각 P, Q라하면, P의 좌표는 $\left(k, \sqrt{a^2-k^2}\right)$이고 Q의 좌표는 $\left(k, \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-k^2}\right)$이다. 그러므로, y-축에 나란한 직선 $x=k$에 의해 C, E의 잘린 선분의 길이는 각각 $2\sqrt{a^2-k^2}$과 $\dfrac{2b}{a}\sqrt{a^2-k^2}$이고 그 비는 $a:b$로 일정하다. 따라서, 카발리에리의 원리에 의해 C와 E의 넓이의 비도 $a:b$이다. 그런데, C의 넓이는 πa^2이다. 그러므로, E의 넓이는 $\dfrac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$이다.

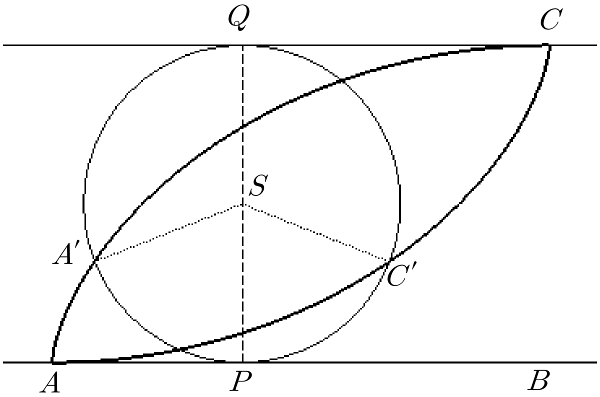
[문제 1-2] 원점에서 x-축에 접하고 있던 반지름이 각각 1과 r인 원에 의해 생성된 싸이클로이드곡선 S_1과 S_2가 다음 그림과 같이 위치하고 있다고 하자. (그림은 $r>1$인 경우를 나타내고 있다.)



O에서 시작하는 임의의 반직선 ℓ이 S_1, S_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, P의 좌표가 $(t-\sin t, 1-\cos t)$라 하자. 그러면, 좌표가 $(r(t-\sin t), r(1-\cos t))$인 점은 직선 ℓ 위에 있으면서 동시에 싸이클로이드곡선 S_2 위에 있게 된다. 즉, Q의 좌표가

$(r(t-\sin t), r(1-\cos t))$가 된다. 따라서, $OP:OQ=(t-\sin t):r(t-\sin t)=1:r$이 되어 일정하므로 S_1과 S_2는 닮은꼴이다.

[문제 1-3] 다음 그림에서

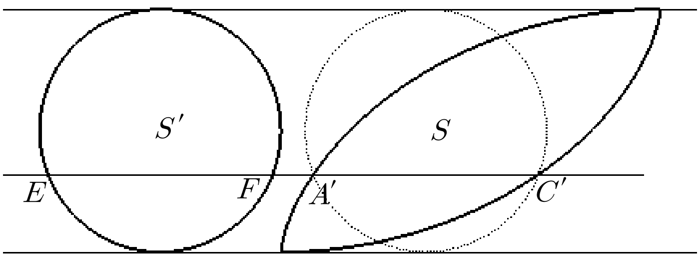


$t=\angle PSA'$이라 하면, $AP=rt$이다. 그러면, $CQ=BP=AB-AP=\pi r-rt=r(\pi-t)$가 되므로 $\angle QSC'=\pi-t$가 된다. 따라서,

$$\angle PSC'=\pi-\angle QSC'=\pi-(\pi-t)=t=\angle PSA'$$

이 되어 $A'C'$은 AB에 평행하게 된다.

[문제 1-4] [문제 1-3]에 의해 다음 그림의 선분 $A'C'$은 직선 AB에 평행인 직선에 의해 두 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역이 잘린 부분이면서 원 S가 잘린 부분이기도 하다.



따라서, 직선 AB에 평행인 직선으로 원 S와 S'을 각각 자른 선분 $A'C'$과 선분 EF는 길이가 같게 된다. 그러면, 카발리에리의 원리에 의해 두 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역의 넓이는 원 S'의 넓이와 같은 πr^2이 된다. 그러므로 구하는 넓이는 두 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역의 넓이의 반에 $\triangle ABC$의 넓이를 더하면 되므로 $\frac{1}{2}\pi r^2+\frac{1}{2}\pi r\cdot 2r=\frac{3}{2}\pi r^2$이다.

[문제 2-1] 도함수의 영점을 구하면 $B'_3(x)=3x^2-3x+\frac{1}{2}=0$으로부터 $x_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$과 $x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$을 얻는다. 두 점은 모두 0과 1 사이에 있다. $B_3(x)$는 $x=x_1$에서 극댓값 $B_3(x_1)=\frac{\sqrt{3}}{36}$와 $x=x_2$에서 극솟값 $B_3(x_2)=-\frac{\sqrt{3}}{36}$을 갖는다. 그런데 $B_3(0)=0$이고 $B_3(1)=0$이므로 $B_3(x)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{36}$이고 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{36}$이다.

[문제 2-2] $B_6(x)$는 $6B_5(x)=6x^5-15x^4+10x^3-x$의 원시함수이므로

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+b_6$$

이다. 조건 $\int_0^1 B_6(x)\,dx=0$을 만족해야 하므로 $b_6=\frac{1}{42}$을 얻는다. 따라서

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$$

이다.

[문제 2-3] (a) $m\geq 2$이면, 식 (1)과 (2)를 이용하여

$$0=\int_0^1 B_{m-1}(x)\,dx=\frac{1}{m}\big(B_m(1)-B_m(0)\big)$$

이다. 그래서 $B_m(0)=B_m(1)$가 성립한다.
(b) $m\geq 1$이면, (a)에서 증명된 사실과 본문의 식 (3)을 이용하여

$$b_{m+1}=B_{m+1}(0)=B_{m+1}(1)=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!}b_k$$

을 얻는다. 양변에서 b_{m+1}을 지우면,

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!}b_k=0$$

이 된다. 한편 좌변은

$$(m+1)b_m+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!}b_k=(m+1)b_m+(m+1)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{b_k}{m-k+1}$$

이므로 원하는 식이 증명된다.

[문제 2-4] (a) 수학적 귀납법을 사용한다. $m=0$인 경우

$$B_1(x+1)-B_1(x)=(x+1)-\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)=1$$

이므로 사실이다. $B_{m+1}(x+1)-B_{m+1}(x)=(m+1)x^m$이 성립한다고 가정하자. $B_{m+2}(x)$는 $(m+2)B_{m+1}(x)$의 원시함수이므로 이제

$$\begin{aligned} B_{m+2}(x+1)-B_{m+2}(x) &= \int (m+2)B_{m+1}(x+1)dx - \int (m+2)B_{m+1}(x)dx \\ &= (m+2)(m+1)\int x^m dx \\ &= (m+2)x^{m+1}+C \end{aligned}$$

이고, 여기서 C는 적분상수이다. $x=0$을 대입하면 $B_{m+2}(1)-B_{m+2}(0)=0$이므로 $C=0$이다. 증명이 끝났다.

(b) (a)의 식에 $x=1,2,...,n$을 차례대로 대입하여 합하면,

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(k+1)-B_{m+1}(k)) = \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n+1)-B_{m+1}(1))$$

이 된다. $B_{m+1}(1)=b_{m+1}$이므로 원하던 식이 증명되었다.