문제 1 (50 점)

(가) n개의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 의한 순서열 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$을 n차원 벡터라 하고, n차원 벡터들의 전체집합을 $\mathbb{R}^n$으로 나타낸다. $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$은 각각 수직선, 좌표평면, 좌표공간과 동일시하기도 한다. $\mathbb{R}^n$의 원소 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$를 점으로 볼 수도 있다. 이 점을 A라 하면 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$을 A의 좌표라 하고 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$으로 나타낸다.

n차원 벡터들에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 두 n차원 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$과 $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$이 서로 같다는 것, 즉 $\vec{a} = \vec{b}$는 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$인 것으로 정의한다.

(2) 두 n차원 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$과 $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$의 합 $\vec{a} + \vec{b}$는 $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$으로 정의한다.

(3) n차원 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$과 실수 r과의 곱 $r\vec{a}$는 $r\vec{a} = (ra_1, ra_2, \cdots, ra_n)$으로 정의한다.

(나) $\mathbb{R}^n$에서 여러 가지 기하학적인 도형을 다룰 수 있다. 먼저 두 점 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$과 $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$을 양 끝점으로 하는 선분 AB는 집합

$$\left\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \mid \vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),\ \vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),\ 0 \leqq t \leqq 1\right\}$$

로 정의한다. 그러므로 점 $C(c_1, c_2, \cdots, c_n)$이 선분 AB 위에 있을 필요충분조건은 $0 \leqq t \leqq 1$인 적당한 실수 t에 대해

$$(1-t)(a_1, a_2, \cdots, a_n) + t(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

즉,

$$c_1 = (1-t)a_1 + tb_1,\ c_2 = (1-t)a_2 + tb_2,\ \cdots,\ c_n = (1-t)a_n + tb_n$$

이 성립하는 것이다. 예를 들면, 선분 AB의 중점의 좌표는 $t = 1/2$에 대응하는 $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \cdots, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$이다.

선분을 이용하여 $\mathbb{R}^n$ 내에서 삼각형과 다각형을 정의할 수 있고 다시 이것들을 이용하여 다면체 등을 정의할 수 있다. 다음의 Schwarz부등식은 n차원 벡터를 다룰 때 유용하다:

(4) $$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

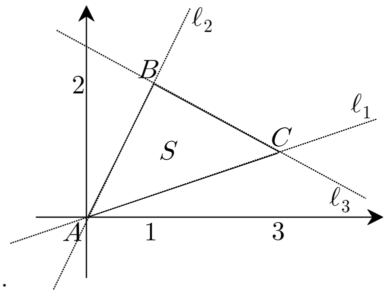
(다) $\mathbb{R}^n$의 부분집합 S가 볼록집합(convex set)이라는 것을 다음과 같이 정의한다:

정의. S에 속하는 임의의 두 점 A, B에 대해 S가 선분 AB 전체를 포함할 때, 즉 $\vec{a} \in S$, $\vec{b} \in S$, $0 \leqq t \leqq 1$이면 $(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \in S$일 때 S를 볼록집합이라 한다.

예를 들어보자. $\mathbb{R}^2$에 속하는 세 점 $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(3,1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형과 그 내부를 집합 S라 하자. 다음 그림에서 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3의 방정식은 각각

$y=\dfrac{1}{3}x$, $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$이기 때문에 집합 S를 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$S=\left\{(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq 3,\ \frac{1}{3}x\leqq y\leqq 2x,\ y\leqq -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right\}$$



이제, S가 볼록집합임을 보이기 위해 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S$라고 하자. 그러면,

$$0\leqq x_1\leqq 3,\ \frac{1}{3}x_1\leqq y_1\leqq 2x_1,\ y_1\leqq -\frac{1}{2}x_1+\frac{5}{2};$$

$$0\leqq x_2\leqq 3,\ \frac{1}{3}x_2\leqq y_2\leqq 2x_2,\ y_2\leqq -\frac{1}{2}x_2+\frac{5}{2}$$

이다. 또한 $0\leqq t\leqq 1$이라 하고 $(x,y)=(1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)$라 두면,

$$x=(1-t)x_1+tx_2\geqq (1-t)\cdot 0+t\cdot 0=0,$$

$$x=(1-t)x_1+tx_2\leqq (1-t)\cdot 3+t\cdot 3=3$$

이다. 그리고,

$$y=(1-t)y_1+ty_2\geqq (1-t)\cdot\frac{1}{3}x_1+t\cdot\frac{1}{3}x_2=\frac{1}{3}((1-t)x_1+tx_2)=\frac{1}{3}x,$$

$$y=(1-t)y_1+ty_2\leqq (1-t)\cdot 2x_1+t\cdot 2x_2=2((1-t)x_1+tx_2)=2x,$$

$$y=(1-t)y_1+ty_2\leqq (1-t)\left(-\frac{1}{2}x_1+\frac{5}{2}\right)+t\left(-\frac{1}{2}x_2+\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

이다. 따라서 $(x,y)\in S$이다. 그러므로 S는 볼록집합이다.

[문제 1-1] (10 점) 세 점 $A(4,2,-1)$, $B(-1,7,9)$, $C(3,3,1)$이 있다. 점 C가 선분 AB 위에 있는지를 판별하라.

[문제 1-2] (10 점) 두 점 $P(1,1,1)$과 $Q(2,-1,3)$이 있다. 선분 PQ와 평면 $2x-y+z=3$이 만나는 점의 좌표를 구하라.

[문제 1-3] (10 점) $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $S=\left\{(x,y)\,|\,0<x<2,\ 0<y<\dfrac{2-x}{2+x}\right\}$가 볼록집합이 아님을 (다)의 정의를 써서 보여라.

[문제 1-4] (10 점) 네 점 $A(2,-1,1)$, $B(1,3,-1)$, $C(3,1,2)$, $D(-1,2,1)$이 있다. 선분 AB와 선분 CD가 만나는지 판별하고, 만나면 교점의 좌표를 구하라.

[문제 1-5] (10 점) $\mathbb{R}^3$의 부분집합 $T=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2<1\}$이 볼록집합임을 (다)의 정의를 써서 보여라.
(힌트: Schwarz부등식 (4)를 이용하라.)

문제 2 (50 점)

함수 $f(x)$는 구간 I에서 정의되고, $x_1, x_2 \in I$라 하자. x_1과 x_2 사이에 있는 실수는, 0보다 크고 1보다 작은 적당한 t에 대하여 $(1-t)x_1 + tx_2$로 표시된다. $x_1 \leqq x \leqq x_2$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(x_1, f(x_1))$과 $(x_2, f(x_2))$를 잇는 직선의 아래에 있으면 함수 $f(x)$는 아래로 볼록하다고 말한다. 다시 말해서, 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 1. 함수 $f(x)$는 구간 I에서 정의된다. 모든 $x_1, x_2 \in I$와 $0 < t < 1$인 모든 실수 t에 대하여 부등식

(1) $$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 구간 I에서 **아래로 볼록**하다고 한다.

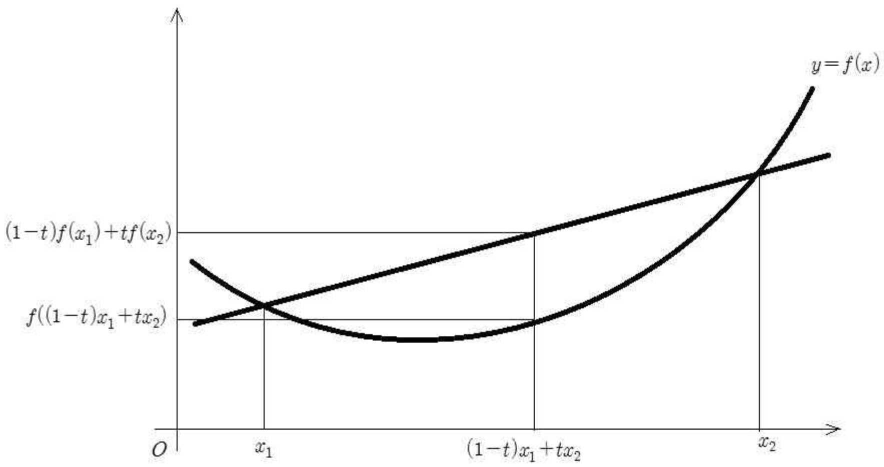


그림 1. 아래로 볼록한 함수의 그래프

수학적 귀납법을 사용하여 부등식 (1)을 확장시킬 수 있다.

정리 2. 함수 $f(x)$가 구간 I에서 아래로 볼록하다고 하자. 그러면 I에 있는 모든 실수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$인 모든 양의 실수 $t_1, t_2, \cdots, t_n$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

(2) $$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leqq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$$

정의 1에서 부등식 (1)과 반대방향의 부등식이 성립할 때, 함수 $f(x)$는 구간 I에서 **위로 볼록**하다고 말한다. 위로 볼록한 함수에 대하여 (2)와 반대 방향의 확장된 부등식이 성립할 것은 분명하다.

정리 3. 함수 $f(x)$가 구간 I에서 위로 볼록하다고 하자. 그러면 I에 있는 모든 실수 $x_1, x_2, \dots, x_n$과 $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$인 모든 양의 실수 $t_1, t_2, \dots, t_n$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

(3) $$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \geqq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$$

덴마크의 수학자 젠센(Jensen)의 이름을 따라 부등식 (2)와 (3)을 **젠센의 부등식**이라 부른다. 함수의 볼록함은 2계 도함수를 이용하면 쉽게 확인할 수 있다.

정리 4. 함수 $f(x)$가 구간 I에서 두 번 미분가능하다면, 다음이 성립한다.
(a) 구간 I에서 $f''(x)>0$이면, $f(x)$는 I에서 아래로 볼록하다.
(b) 구간 I에서 $f''(x)<0$이면, $f(x)$는 I에서 위로 볼록하다.

젠센의 부등식을 이용하여 다른 부등식들을 증명할 수 있다. 이차 함수 $f(x)=x^2$을 생각하자. 2계 도함수는 $f''(x)=2>0$이므로 $f(x)=x^2$은 항상 아래로 볼록하다. 부등식 (1)에서 $t=\frac{1}{2}$이라 두면, 모든 x_1, x_2에 대하여 부등식

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \leqq \frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}$$

이 성립한다. 이 식을 정리하면

$$x_1x_2 \leqq \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$$

이 되고, 이제 $x_1^2=a$, $x_2^2=b$라 놓으면 유명한 산술평균–기하평균 부등식을 얻는다.

예제 5. 양의 실수 a, b, c가 $a+b+c=1$을 만족할 때,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3+\left(b+\frac{1}{b}\right)^3+\left(c+\frac{1}{c}\right)^3$$

의 최솟값을 구해 보자. 먼저 함수 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$을 생각한다. $x>0$이면

$$f''(x)=6\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\frac{1}{x^3}>0$$

이므로 $f(x)$는 아래로 볼록하다. 주어진 식은

$$f(a)+f(b)+f(c)=\frac{3(f(a)+f(b)+f(c))}{3}$$

와 같다. 젠센의 부등식 (2)를 이용하면

$$\frac{3(f(a)+f(b)+f(c))}{3} \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}+3\right)^3=3\left(\frac{10}{3}\right)^3$$

을 얻는다. $a=b=c=1/3$일 때 등호가 성립하므로, 구하는 최솟값은 $\frac{1000}{9}$이다.

[문제 2-1] (12 점) 양의 실수 a, b, c, d가 $a+b+c+d=1$을 만족할 때,

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c + d\ln d$$

의 최솟값을 구하라.

[문제 2-2] (13 점) 임의의 삼각형 ABC에 대하여

$$\sin A \sin B \sin C \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

이 성립함을 보여라. 그리고 등호가 성립할 수 있는지 말하라.

[문제 2-3] (12 점) 자연수 r이 주어졌을 때, 양의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 r승 평균을

$$S_r = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{1/r}$$

이라 정의한다. 자연수 r과 t가 $r<t$이면, $S_r \leqq S_t$임을 증명하라.

(힌트: 함수 $f(x) = x^{\frac{r}{t}}$ 는 $x>0$일 때 위로 볼록하다는 사실을 이용하라.)

[문제 2-4] (13 점) 양의 실수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$을 만족할 때,

$$\left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right)^5 + \left(x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)^5 + \cdots + \left(x_n^2 + \frac{1}{x_n^2}\right)^5$$

의 최솟값을 구하라.

<풀이>

[문제 1-1] 세 점 A, B, C에 대해

$$(3,3,1) = (1-t)(4,2,-1) + t(-1,7,9)$$

라 두면

$$\begin{cases} 3 = 4(1-t) - t = 4 - 5t \\ 3 = 2(1-t) + 7t = 2 + 5t \\ 1 = -(1-t) + 9t = -1 + 10t \end{cases}$$

이고, 이를 풀면 $t = \frac{1}{5}$이다. 따라서 $t = \frac{1}{5}$일 때 $0 \leqq t \leqq 1$이고,

$$(3,3,1) = (1-t)(4,2,-1) + t(-1,7,9)$$

가 성립하므로 점 C는 선분 AB 위에 있다.

[문제 1-2] 선분 PQ와 주어진 평면의 교점을 R이라 하면, 적당한 $0 \leqq t \leqq 1$에 대해 R의 좌표는

$$(1-t)(1,1,1) + t(2,-1,3) = (1+t, 1-2t, 1+2t)$$

로 나타낼 수 있다. 이 점이 주어진 평면 위에 있기 때문에

$$2(1+t) - (1-2t) + 1 + 2t = 3$$

을 만족한다. 이를 정리하면 $6t+2=3$이고, 이를 풀면 $t = \frac{1}{6}$이고, 이 값은 $0 \leqq t \leqq 1$을

만족한다. 이 때 R의 좌표는 $\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$이다.

[문제 1-3] 두 점 $A(0.1, 0.9)$와 $B(1.5, 0.1)$는 집합 S의 원소이다. (확인 필요) 선분 AB의 중점을 M이라 두면 M의 좌표는 $(0.8, 0.5)$이다. 그런데,

$$\frac{2-0.8}{2+0.8} = \frac{1.2}{2.8} < \frac{1.4}{2.8} = 0.5$$

이므로 M은 집합 S의 원소가 아니다. 따라서 집합 S는 선분 AB를 포함하지 않으므로 볼록집합이 아니다.

[문제 1-4] 선분 AB와 선분 CD가 만난다고 가정하고 그 교점을 $E(x,y,z)$라 두자. 그러면, E가 선분 AB 위에 있으므로 적당한 $0 \leqq t \leqq 1$에 대해

$$(x,y,z) = (1-t)(2,-1,1) + t(1,3,-1) = (2-t,\ -1+4t, 1-2t)$$

이다. 또한 E가 선분 CD 위에 있으므로 적당한 $0 \leqq s \leqq 1$에 대해

$$(x,y,z) = (1-s)(3,1,2) + s(-1,2,1) = (3-4s, 1+s, 2-s)$$

이다. 따라서

$$\begin{cases} 2-t = 3-4s \\ -1+4t = 1+s \\ 1-2t = 2-s \end{cases}$$

가 성립한다. 처음 두 방정식을 연립하여 풀면 $t = \frac{3}{5}$, $s = \frac{2}{5}$이다. 그러나 이 값은 세 번째 방정식을 만족하지 않는다. 따라서 선분 AB와 선분 CD는 만나지 않는다.

[문제 1-5] $A(x_1, y_1, z_1)$과 $B(x_2, y_2, z_2)$가 T의 원소라고 하자. 그러면, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$이고 $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 < 1$이다. 선분 AB 위의 임의의 점 $C(x,y,z)$를 $0 \leqq t \leqq 1$을 써서

$$(x,y,z) = (1-t)(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) = ((1-t)x-1) + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)z_1 + tz_2)$$

로 나타내자. 그러면,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= ((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 + ((1-t)z_1 + tz_2)^2 \\ &= (1-t)^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + t^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + 2(1-t)t(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\ &< (1-t)^2 + t^2 + 2(1-t)t(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\ &\leqq (1-t)^2 + t^2 + 2(1-t)t\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\ &< (1-t)^2 + t^2 + 2(1-t)t = ((1-t)+t)^2 = 1 \end{aligned}$$

즉, $x^2 + y^2 + z^2 < 1$이다. 따라서 C는 T의 원소이다. 그러므로 T는 선분 AB를 포함하게 되어 볼록집합이다.

[문제 2-1]

1) x가 양수일 때, $f(x) = x\ln x$라 하면 $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = 1/x > 0$이므로 $f(x)$는 아래로 볼록하다.

2) 젠센의 부등식을 사용하고 $a+b+c+d=1$을 이용하면,

$$\begin{aligned} & a\ln a + b\ln b + c\ln c + d\ln d \\ &= 4\left(\frac{1}{4}a\ln a + \frac{1}{4}b\ln b + \frac{1}{4}c\ln c + \frac{1}{4}d\ln d\right) \\ &= 4\,\frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4} \\ &\geqq 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \\ &= 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\ln\frac{a+b+c+d}{4}\right) = -\ln 4 \end{aligned}$$

을 얻는다.

3) 그런데 $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$일 때, 등식이 성립하므로 최솟값은 $-\ln 4$이다.

[문제 2-2]

풀이 1.

1) 산술평균 기하평균 부등식을 이용하면

$$\sin A \sin B \sin C \leqq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$$

이 성립한다.

2) $0 < x < \pi$일 때 $f(x) = \sin x$는 위로 볼록하다. 젠센의 부등식에 의하여

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leqq \sin\frac{A+B+C}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로, $\sin A \sin B \sin C \leqq \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$이다.

3) 등호는 $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$일 때, 즉 정삼각형일 때 성립한다.

풀이 2.

1) $I = \sin A \sin B \sin C$라 하면, $\ln I = \ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C$이다. 이제 함수 $f(x) = \ln\sin x$라고 정의한다. $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$이고 $f''(x) = -\csc^2 x < 0$이므로 $f(x)$는 $0 < x < \pi$일 때 위로 볼록하다.

2) 젠센의 부등식을 이용하여

$$\ln I = \frac{3(\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C)}{3} \leqq 3\ln\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\ln\sin\frac{\pi}{3} = 3\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 얻는다. 따라서 $I \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$이다.

3) 등호는 $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$일 때, 즉 정삼각형일 때 성립한다.

[문제 2-3]

풀이 1.

1) 젠센의 부등식에 의하여, 모든 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} = \frac{f(a_1^t) + f(a_2^t) + \cdots + f(a_n^t)}{n}$$
$$\leq f\left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right) = \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{r/t}$$

이 성립함을 알 수 있다.

2) 양변을 $\frac{1}{r}$승 하면,

$$\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{1/r} \leq \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{1/t}$$

이 되어 부등식 $S_r \leq S_t$을 얻는다.

풀이 2.

1) 젠센의 부등식에 의하여, 모든 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여

$$\frac{a_1^{r/t} + a_2^{r/t} + \cdots + a_n^{r/t}}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{r/t}$$

이 성립함을 알 수 있다.

2) 여기서 a_1을 a_1^t로, a_2를 a_2^t로, ..., a_n을 a_n^t로 대치하면

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} \leq \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{r/t}$$

을 얻는다.

3) 양변을 $\frac{1}{r}$승 하면,

$$\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{1/r} \leq \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{1/t}$$

이 되어 부등식 $S_r \leq S_t$을 얻는다.

[문제 2-4]

풀이 1.

1) 함수 $f(x)=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^5$ 를 생각하자. 미분하면

$$f'(x)=5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4\left(2x-\frac{2}{x^3}\right),$$

$$f''(x)=20\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(2x-\frac{2}{x^3}\right)^2+5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4\left(2+\frac{6}{x^4}\right)>0$$

이므로 $f(x)$는 아래로 볼록하다.

2) 주어진 식은

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=\frac{n(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))}{n}$$

과 같다. 젠센의 부등식을 이용하면

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=nf(1)=32n$$

을 얻는다.

3) 실제로 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$일 때 등호가 성립하므로, 구하는 최솟값은 $32n$이다.

풀이 2.

1) 산술평균-기하평균 부등식에 의하여, 주어진 식의 i번째 항은

$$\left(x_i^2+\frac{1}{x_i^2}\right)^5\geqq\left(2\sqrt{x_i^2\frac{1}{x_i^2}}\right)^5=2^5=32$$

이다. 그러므로

$$\left(x_1^2+\frac{1}{x_1^2}\right)^5+\left(x_2^2+\frac{1}{x_2^2}\right)^5+\cdots+\left(x_n^2+\frac{1}{x_n^2}\right)^5\geqq 32n$$

이 성립한다.

2) 실제로 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$일 때 등호가 성립하므로, 구하는 최솟값은 $32n$이다.