2010학년도 아주대학교 수시2차 논술고사 예시답안 (자연계열)

◆ 자연계열

<예시답안>

[문제1-1]

(풀이) 자장면, 짬뽕, 우동을 반드시 하나씩 포함 하므로 자장면, 짬뽕, 우동에서 7인분을 주문하는 경우의 수와 같다. 따라서

$$H(7,3) = C(9,2) = \frac{9\times 8}{2} = \underline{36}$$

[문제1-2]

(풀이) 빨간 구슬을 R_1, R_2 라 두고, 푸른 구슬을 B_1, B_2 라 두면 $C(4,2)$는 다음과 같은 경우의 수를 모두 센 결과이다: (R_1,R_2), (R_1,B_1), (R_2,B_1), (R_1,B_2), (R_2,B_2), (B_1,B_2)

이 중 <u>$(R_1,B_1),(R_2,B_1),(R_1,B_2),(R_2,B_2)$는 한 번만 세어져야 하는데 중복해서 세어졌다</u> (빨강구슬, 파란구슬 각각 1개인 경우에 해당).

[문제1-3]

(풀이1) 제시문에 주어진 식을 이용하면

$H(n,k) = C(n+k-1,\, k-1)$이고 $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,\, k-1)$이므로

$H(n,k) = C(n+k-1,\, k-1) = C(n+k-2,\, k-1) + C(n+k-2,\, k-2) = H(n-1,\, k) + H(n,k-1)$

(풀이2) 제시문의 점화식을 이용하면

$$H(n,k) = \sum_{j=0}^{n} H(j,k-1) = H(n,k-1) + \sum_{j=0}^{n-1} H(j,k-1)$$

$$H(n-1,k) = \sum_{j=0}^{n-1} H(j,k-1)$$ 이므로 $\underline{H(n,k) = H(n,k-1) + H(n-1,k)}$ 을 만족한다.

(풀이3) $H(n,k)$가 k 종류의 음식에서 n그릇을 주문하는 방법의 수이므로

(a) 특정음식을 배제하고 주문하는 방법의 수: $H(n,k-1)$

(b) 특정음식을 최소한 한 그릇 포함하는 주문방법의 수: $H(n-1,k)$

로 나누어 계산할 수 있다. 두 경우를 더하면, $\underline{H(n,k) = H(n,k-1) + H(n-1,k)}$ 을 만족한다.

[문제1-4]

(풀이1) 특정학생 1명, 학생 A라 하자, 을 제외한 $(n-1)$명의 학생으로 그룹을 만드는 방법은 다음 두가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(a) $(n-1)$명에서 $(k-1)$개의 그룹을 만드는 경우: 학생 A는 반드시 1명으로 이루어진 새 그룹을 만들어야 한다. 따라서 경우의 수는 $G(n-1,k-1)$

(b) $(n-1)$명에서 k그룹을 만드는 경우: 학생 A는 k개의 그룹 어디에나 들어갈 수 있다. 따라서 경우의 수는 $kG(n-1,k)$ 이다.

두 경우의 수를 합하면 $\underline{G(n,k)=G(n-1,k-1)+kG(n-1,k)}$가 된다.

(풀이2) 특정학생 1명을 고려하여
특정학생1명으로 단독 그룹을 구성하는 방법의 수: $G(n-1,k-1)$
(특정학생1명 + 1명)으로 그룹을 구성하는 방법의 수: $C(n-1,1)\times G(n-2,k-1)$
(특정학생1명 + 2명)으로 그룹을 구성하는 방법의 수: $C(n-1,2)\times G(n-3,k-1)$
· · ·
(특정학생1명 + $(n-k)$명)으로 그룹을 구성하는 방법의 수: $C(n-1,n-k)\times G(k-1,k-1)$
이들 경우의 수를 모두 합하면 $\underline{G(n,k)=\sum_{l=0}^{n-k} C(n-1,l)\times G(n-l-1,k-1)}$

(2) (8점) $G(6,3)$을 계산하여라.

(풀이1) (1)에서구한 점화식을 이용하는 방법
$G(2,1)=1$, $G(2,2)=1$, 따라서
$G(3,2)=G(2,1)+2G(2,2)=3$, $G(4,2)=G(3,1)+2G(3,2)=7$,
$G(4,3)=G(3,2)+3G(3,3)=6$, $G(5,2)=G(4,1)+2G(4,2)=15$
$G(5,3)=G(4,2)+3G(4,3)=25$, $G(6,3)=G(5,2)+3G(5,3)=90$
$\underline{G(6,3)=90}$ 이다.

(풀이2) 6명을 세 그룹으로 나눌 때 가능한 그룹의 크기는 1-1-4, 1-2-3, 2-2-2 이고 각 경우 가능한 그룹구성의 방법의 수는 다음과 같다:
1-1-4 $C(6,4)\times C(2,1)\times C(1,1)/2!=15$
1-2-3 $C(6,3)\times C(3,2)=20\times 3=60$
2-2-2 $C(6,2)\times C(4,2)\times C(2,2)/3!=15$
따라서 $\underline{G(6,3)=15+60+15=90}$

[문제 2-1]
(풀이)
(1) 명백히 $m\neq 0$이다. 직선의 방정식을 x에 대해 다시 쓰면 $x=\frac{1}{m}y-\frac{k}{m}$이다. 이것과 포물선의 방정식을 연립하여 2차방정식 $ay^2+\left(b-\frac{1}{m}\right)y+\left(c+\frac{k}{m}\right)=0$을 얻게 된다. 이 2차방정식이 중근을 가지면 되므로 구하는 등식은 판별식에 의해

$$\underline{\left(b-\frac{1}{m}\right)^2-4a\left(c+\frac{k}{m}\right)=0} \text{ 또는 } \underline{(mb-1)^2-4ma(mc+k)=0} \quad \text{이다.}$$

(별해) 직선의 식과 포물선의 식을 x에 관한 이차식으로 정리하면 $am^2x^2+(2amk+bm-1)x+ak^2+bk+c=0$ 이고 이로부터 (판별식=0) 의 조건을 사용하면 $\underline{(2amk+bm-1)^2-4am^2(ak^2+bk+c)=0}$ 을 얻는다.

(2) 위에서 구한 등식에 $a=-1$, $b=c=0$, $m=1$을 대입하면, $1+4k=0$을 얻을 수 있고 이것으로부터 $k=-\frac{1}{4}$을 얻게 된다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$\underline{y=x-\frac{1}{4}} \quad \text{이다.}$$

(3) 직선 $y=x-\frac{1}{4}$이 원 $(x-p)^2+y^2=1$에 접하면 되므로, 제시문 (나)의 (수식 2)에

$q=0,\ r=1, m=1,\ k=-\frac{1}{4}$를 대입하여 $2=\left(p-\frac{1}{4}\right)^2$을 얻을 수 있고, 이로부터

$\underline{p=\sqrt{2}+\frac{1}{4}}$ 을 얻게 된다.

(별해) 원의 중심 $(p,0)$에서 직선 $y=x-\frac{1}{4}$까지의 거리는 $\frac{|p-\frac{1}{4}|}{\sqrt{2}}$이므로, $\frac{|p-\frac{1}{4}|}{\sqrt{2}}=1$을 만족하는 양수 p를 구하면 $p=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$ 이다.

[문제 2-2]
(풀이)

(1) 선분 PQ의 **중점의 좌표는** $\left(\frac{t}{2},0\right)$이고, 선분 PQ의 기울기는 $-\frac{2}{t}$이므로 직선 ℓ_t는 점 $\left(\frac{t}{2},0\right)$을 지나고 **기울기** $\frac{t}{2}$인 직선이며 이 직선의 방정식은

$\underline{y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}}$ 이다.

(2) 포물선 C의 방정식을 $y=ax^2+bx+c$라 두자. 직선 ℓ_t가 이 포물선에 접하려면 제시문 (나)의 (수식 1)에 의해

$$\left(b-\frac{t}{2}\right)^2-4a\left(c+\frac{t^2}{4}\right)=0$$

이 성립해야 한다. 이 등식을 t에 관한 식으로 정리하면

$$\left(\frac{1}{4}-a\right)t^2-bt+(b^2-4ac)=0$$

이 되므로, 이것이 **모든 t에 대해 성립**하려면 모든 계수가 0이면 된다. 따라서, $a=\frac{1}{4},\ b=0,\ c=0$이 되고, 구하는 포물선 C의 방정식은 $\underline{y=\frac{1}{4}x^2}$ 이다.

(3) 포물선 C위의 임의의 점 $\left(s,\frac{s^2}{4}\right)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=mx+\frac{s^2}{4}-ms$이다. 이 직선이 포물선 C에 접하려면 제시문 (나)의 (수식 1)에 의해 $m^2+\frac{s^2}{4}-ms=0$이 성립해야 하므로 $m=\frac{s}{2}$이다. 따라서 포물선 C 위의 임의의 점 $\left(s,\frac{s^2}{4}\right)$에서 접하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{s}{2}x-\frac{s^2}{4}$$

이고, 이것은 $t=s$에 대한 직선 ℓ_t가 된다.

(별해) 포물선 $C: y=-\frac{1}{4}x^2$에 접하는 임의의 직선을 $y=mx+k$라 하자. 그러면, 제시문 (나)의 (수식 1)에 의해 $(-m)^2-4\cdot\frac{1}{4}(-k)=0$이 성립하므로 $k=-m^2$이 된다. 따라서 이 접선의 방정식은 $y=mx-m^2$이고, 이것은 ℓ_{2m}에 해당한다.

[문제 2-3]

(풀이)

(1) P와 C의 접점을 F, 접선과 x−축의 교점을 G, C가 x−축과 접하는 점을 H라 두자.

F의 좌표가 (t,t^2)이므로 접선의 방정식은 $y=2tx-t^2$이고 G의 좌표는 $\left(\frac{t}{2},0\right)$이다. 그리고, H의 좌표는 $(p,0)$이다. 원 C의 방정식이 $(x-p)^2+(y-q)^2=q^2$이고 점 F가 원 C 위에 있어야 하므로

식1 $(t-p)^2+(t^2-q)^2=q^2$

이 성립하고, 두 선분 GH와 GF의 길이가 같으므로

식2 $p-\frac{t}{2}=\sqrt{\left(t-\frac{t}{2}\right)^2+(t^2)^2}$

이 성립한다. 이 두 식을 연립하여 풀면

$p=\frac{t}{2}\left(1+\sqrt{1+4t^2}\right)$, $\quad q=t^2+\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1+4t^2}\right)$ 이다.

(별해1) 식1 $(t-p)^2+(t^2-q)^2=q^2$

점 (p,q)와 (t,t^2)를 잇는 직선은 접선 $y=2tx-t^2$ 에 수직이므로 식2' $\frac{t^2-q}{t-p}=-\frac{1}{2t}$

(별해2) 식1 $(t-p)^2+(t^2-q)^2=q^2$

(p,q)에서 접선 $y=2tx-t^2$까지의 거리가 q이어야하므로 식2'' $\frac{|2tp-q-t^2|}{\sqrt{4t^2+1}}=q$

(별해3) 포물선의 (t,t^2)에서의 접선의 방정식: $y=2tx-t^2$

제시문 (나)의 식을 이용하면 원의 (t,t^2)에서의 접선의 방정식: $(t-p)(x-p)+(t^2-q)(y-q)=q^2$ 이고

두 접선이 일치해야하므로

식1' $\quad -t^2=\frac{qt^2+p(t-p)}{t^2-q}$ $\qquad$ 식2' $\quad 2t=-\frac{t-p}{t^2-q}$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{p}{q}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t}{2}\left(1+\sqrt{1+4t^2}\right)}{t^2+\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1+4t^2}\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}\right)}{1+\frac{1}{4t}\left(\frac{1}{t}-\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}\right)}=1.$