2010학년도 아주대학교 수시2차 논술고사 기출문제 (자연계열)

◆ 출제유형:인문계열(통합논술 - 언어·사회분야), 자연계열(수리논술)

◆ 개요

- 시험시간: 120분
- 출제문항수: 인문계열(2~3문항), 자연계열(4~8문항)
- 답안지 양식, 작성 분량: 인문계열(원고지 양식, 1600자 정도, 자료제시 논술형),
  자연계열(유선, A4 4페이지 분량, 자료제시 논술형)

◆ 출제방향(취지) 및 교과서관련여부 및 근거

- 자연계열[수리논술]
  - ·수리적 분석력, 응용력, 창의력을 보는 문제 출제
  - ·정상적이니 고교과정을 이수한 학생의 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 문제를 다룸
  - ·각 주제별로 쉬운 문제에서 까다로운 문제까지 단계적인 접근방식 제시
  - ·답이 틀려도 풀이과정이 옳으면 상당한 부분점수를 받을 수 있음
  - ·공식을 암기하여 풀 수 있는 문제는 출제하지 않음
  - ·영어 제시문은 출제하지 않음
- 인문계열[통합논술(언어·사회분야)]
  - ·중등교육 과정을 정상적으로 이수한 수험생이라면 해결할 수 있는 수준의 문제 출제
  - ·요약형 문제와 통합형 문제 출제
  - ·요약형 문제의 경우 수험생 본인의 의견을 더하지 않고 제시문에서 소주제문들을 간추려 한편의 글이 되도록 요약하는 능력을 측정하며, 답안분량은 300~400자 정도임
  - ·통합형 문제의 경우 3~5개의 독립된 제시문들을 주고 그 지문들을 서로 연결하는 논리력과 통합적 사고력을 측정하며, 답안분량은 900~1,200자 정도임(제시문들은 인문/사회분야를 비롯한 범교과 과정에서 골고루 취함)

◆ 자연계열

<기출문제>

[1번 문항] (50점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

한 번 시행으로 일어날 수 있는 사건의 가짓수를 경우의 수라고 하며, 경우의 수의 계산은 확률 및 통계 분야의 문제해결에 필수적 요소이다. 경우의 수의 계산에는 일반적으로 순열과 조합의 수의 계산이 필요하며 이 계산에서 다음과 같은 논리적 오류가 발생할 수 있다.

* [누락]: 일부 경우를 누락하여 세는 오류.
* [중복]: 같은 경우를 중복하여 세는 오류.

다음은 경우의 수를 계산하는 주요한 두 가지 방법이다.

1) 직접계산: 가능한 경우를 중복 또는 누락되지 않게 나열하여 계산하는 방법

2) 점화식계산: 집단의 개수 및 종류의 개수를 늘이거나 줄일 때 생기는 경우의 수들의 관계식을 통하여 계산하는 방법.

(가) 직접계산에 의한 순열 및 조합의 수의 계산:

(순열) n명의 학생 중에서 k명의 학생을 차례로 선발하는 방법을 순열이라고 한다. 이 순열의 수를 $P(n,k)$라고 하자. 첫 번째 학생을 선발하는 방법은 n가지, 그리고 두 번째 학생을 선발하는 방법은 $(n-1)$가지, 이 과정을 연속적으로 반복하면, 마지막 k번째 학생을 선발하는 방법은 $(n-k+1)$ 가지이다. 따라서 순열의 수는

$$P(n,k)=n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

이 된다. 단, $n \geq k$ 이며 $m!=m(m-1)\cdots 1$, $0!=1$이다.

(조합) n명의 학생 중에서 k명의 학생을 선발하는 방법을 조합이라고 한다. 이 조합의 수를 $C(n,k)$라고 하자. n명의 학생 중에서 k명의 학생을 선발하고, 선발된 k명의 학생을 순서대로 나열하는 방법의 수가 $P(n,k)$와 같다는 사실로부터 $C(n,k)\,k!=P(n,k)$이다. 따라서

$$C(n,k)=\frac{P(n,k)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

가 된다. 단 $n \geq k$ 이다.

(중복조합) 중복조합은 예를 들어 설명한다. 모두 10그릇의 자장면, 짬뽕, 우동을 주문할 때 (우동만 10그릇을 주문할 수도 있다), 서로 다른 주문방법의 수 $H(10,3)$을 구하는 문제를 생각해 보자. 이 문제의 해는 12칸의 빈 주문표에서 2칸를 선택하는 방법의 수와 동일하다: 즉, 표1과 같이 두 칸이 선택된 경우는, 표2와 같이 빈칸에 자장면, 짬뽕, 우동을 순서대로 기입하여 자장면(3그릇), 짬뽕(5그릇), 우동(2그릇)을 주문하는 경우로 이해하면 된다. 따라서, $H(10,3)=C(10+2,2)$이다.

			xxx						xxx		

(표 1)

자장면	자장면	자장면	xxx	짬뽕	짬뽕	짬뽕	짬뽕	짬뽕	xxx	우동	우동

(표 2)

일반적으로 k종류의 음식에서 n그릇을 주문하는 방법의 수 $H(n,k)$는

$$H(n,k)=C(n+k-1,k-1)$$

이 된다. 이때 n이 k 보다 같거나 클 필요는 없다.

(나) 점화식에 의한 순열 및 조합의 수 계산:

(순열) n명의 학생 중에서 k명의 학생을 차례로 선발하는 방법의 수는, n명의 학생 중에서 $(k-1)$명의 학생을 차례로 선발한 후, 남은 $(n-k+1)$명의 학생 중에서 한명을 더 선발하는 방법의 수와 같다. 따라서

$$P(n,k) = (n-k+1)\,P(n,k-1)$$

이 된다. 그런데 $P(n,1) = n$이므로 $P(n,k) = (n-k+1)(n-k+2)\cdots n$ 이 성립한다.

(조합) n명의 학생 중에서 k명의 학생을 선발하는 방법의 수는, 학생 1명을 정해서, 그 학생이 선발된 경우와 선발되지 않은 경우로 나누어 계산할 수 있다. 즉, $(n-1)$명에서 $(k-1)$명을 선발하는 방법의 수와 $(n-1)$명에서 k명을 선발하는 방법의 수의 합이다. 따라서

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$$

이 된다. 모든 자연수 j에 대하여 $C(j,1) = j,\ C(j,j) = 1$ 이며, 이를 이용하여 $C(n,k)$을 구한다.

(중복조합) 앞의 예와 같이 설명한다. 자장면, 짬뽕, 우동 10그릇을 주문하는 방법은 우동의 수에 따라 다음의 10가지의 경우로 분류 할 수 있다. 우동이 하나도 없는 경우 자장면 및 짬뽕에서 10개를 주문하므로 방법의 수는 $H(10,2)$, 우동이 하나만 있는 경우 자장면 및 짬뽕에서 9개를 주문하므로 방법의 수는 $H(9,2)$, 이 과정을 반복하여 마지막으로 모두가 우동인 경우 방법의 수는 $H(0,2)$이 된다. 따라서

$$H(10,3) = H(10,2) + H(9,2) + \cdots + H(0,2) = \sum_{j=0}^{10} H(j,2)$$

이 된다. 그리고 k종류의 음식에서 n그릇을 주문하는 방법의 수는

$$H(n,k) = \sum_{j=0}^{n} H(j,k-1)$$

이다. 모든 자연수 j에 대하여 $H(0,j) = 1,\ H(1,j) = j$ 이며, 이를 이용하여 $H(n,k)$을 구한다.

※ 답안지에 풀이 과정을 반드시 쓰시오.

[문제 1-1] (8점) 자장면, 짬뽕, 우동 10그릇을 주문할 때, 3종류의 음식을 적어도 한 그릇씩 반드시 포함하는 주문방법의 수는 얼마인가 ?

[문제 1-2] (12점) 철수는 빨강, 파랑 2종류의 구슬에서 2개의 구슬을 선택하는 방법의 수를, 빨강구슬 2개, 파랑구슬 2개(총 4개의 구슬)가 있는 가상의 구슬 주머니에서 2개의 구슬을 선택하는 방법의 수로 생각하여 $C(4,2)$로 계산했다. 철수의 계산에 어떤 오류가 있는지 누락 혹은 중복의 구체적인 예를 들어 설명하라.

[문제 1-3] (12점) 중복조합의 수 $H(n,k)$가 만족하는 점화식을 $H(n,k),\ H(n-1,k)$ $H(n,k-1)$의 관계식으로 구하고, 증명하여라. (단, $k \geq 2,\ n \geq 1$ 이다)

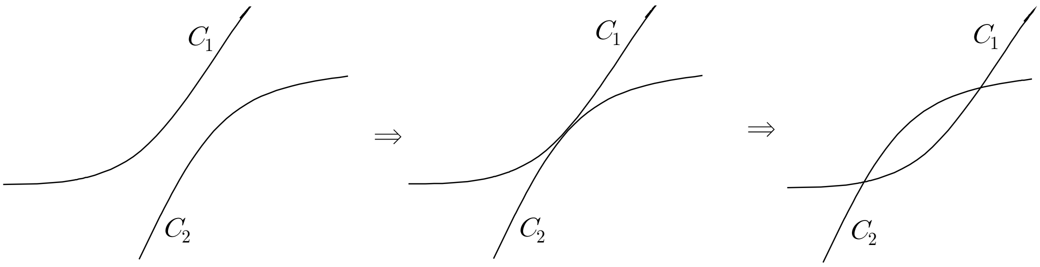
[문제 1-4] (1) (10점) n명의 학생을 k (단, $k \leq n$)개의 그룹으로 나누는 경우의 수 $G(n,k)$ 의 점화식을 구하라. (각 그룹은 적어도 한명의 학생을 포함하며, 그룹의 나열 순서는 고려하지 않는다. 예를 들면 $G(3,3) = 1$ 이다)

(2) (8점) $G(6,3)$을 계산하여라.

[2번 문항] (50점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 두 곡선이 접한다는 것을 기하학적으로 엄밀하게 정의하는 것은 간단하지 않다. 원과 직선이 접하는 경우는 예외적으로 간단하다. 원과 직선의 관계는 만나지 않거나, 한 점에서 만나거나, 두 점에서 만나는 세 가지인데, 이 중에서 한 점에서 만나는 경우가 바로 접하는 경우이기 때문이다. 일반적으로 두 곡선이 접한다는 것은 접점 근처의 국지적인 현상이다. 접점에서 멀리 떨어진 곳에서 두 곡선은 다시 접하거나 교차할 수 있다. 따라서 “두 곡선 $C_1,\ C_2$가 점 P에서 접한다”처럼 접점을 언급해야 두 곡선이 접한다는 것의 의미가 명확해진다. 함수의 그래프에 접하는 직선의 경우에는 대개 주어진 함수에 대한 미분을 이용하여 접선의 기울기를 설명하지만, 이 글에서는 미분을 사용하지 않고 접하는 조건을 설명하려고 한다.

다음과 같이 두 곡선 C_1, C_2 중에서 곡선 C_1은 고정하고, 곡선 C_2를 곡선 C_1을 향해 연속적으로 평행이동해 보자.



<그림 1>

이를 통해, 두 곡선이 접하는 경우는 일순간의 현상이며 그 전과 후에 접점은 사라지거나 두 개 이상의 교점으로 분리되는 것을 관찰할 수 있다. 접점이 두 개 이상의 교점으로 분리되면 이 교점들은 평행이동이 진행됨에 따라 일단 거리가 멀어진다. 또는 이 과정을 역으로 생각해서, 한 곡선의 평행이동에 따라 두 개 이상의 교점이 점점 가까워져서 한 점으로 겹쳐지는 순간 두 곡선이 접하게 된다는 것을 알 수 있다.

다음으로 한 곡선 C 위의 점 P에서 이 곡선에 접하는 직선에 대해 생각해 보자. 먼저 점 P를 지나는 직선 ℓ을 임의로 잡자. 이 직선을 점 P를 중심으로 해서 회전시켜 보면, ℓ과 C의 두 개 이상의 교점이 점 P에서 겹쳐지는 순간이 있다. 이 순간의 직선이 점 P에서 곡선 C에 접하는 직선이 된다는 것을 알 수 있다.

이상의 관찰을 통해, <u>두 곡선이 접하는 것은 접점이 생겼을 때인데, 접점은 두 개 이상의 교점이 겹쳐진 점</u>이라고 결론지을 수 있다.

(나) 제시문 (가)를 통해 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다: 미지수 x, y에 관한 방정식 $f(x,y)=0$과 $g(x,y)=0$으로 각각 주어진 두 곡선이 서로 접하기 위해서는 두 방정식 $f(x,y)=0$과 $g(x,y)=0$에서 한 미지수를 소거하여 얻은 x에 관한 방정식 또는 y에 관한 방정식이 중근을 가지면 된다. 몇 가지 특별한 경우에 대해 이 조건을 구체적으로 살펴 보기로 한다.

<u>포물선과 직선</u>: 포물선 $y=ax^2+bx+c$와 직선 $y=mx+k$가 접할 조건은 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+k$가 중근을 가지는 것이다. 판별식을 사용해 이는 다음 등식이 성립하는 것임을 알 수 있다:

(수식 1) $\qquad (b-m)^2-4a(c-k)=0$

특히, 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (t,t^2)에서 그은 접선의 방정식은 $a=1$, $b=c=0$, $k=t^2-mt$을 (수식 1)에 대입해서 구한 $y=2tx-t^2$이 된다.

<u>원과 직선</u>: 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$과 직선 $y=mx+k$가 접할 조건은 이차방정식 $(x-p)^2+(mx+k-q)^2=r^2$이 중근을 가지는 것이다. 판별식을 사용해 이는 다음 등식이 성립하는 것임을 알 수 있다:

(수식 2) $\qquad (m^2+1)r^2=(mp+k-q)^2$

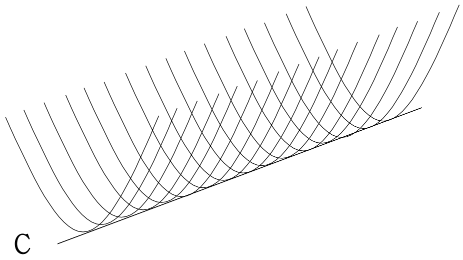
한 편, 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 위의 한 점 (u,v)에서 그은 접선은 이 접점과 원의 중심 (p,q)를 이은 직선이 이 접선과 수직이라는 사실에 의해 $y=-\dfrac{u-p}{v-q}(x-u)+v$가 됨을 알 수 있다. 이 접선의 방정식은 (u,v)가 원 위의 점이라는 사실을 이용하면
다음과 같이 나타낼 수도 있다:

$$(u-p)(x-p)+(v-q)(y-q)=r^2$$

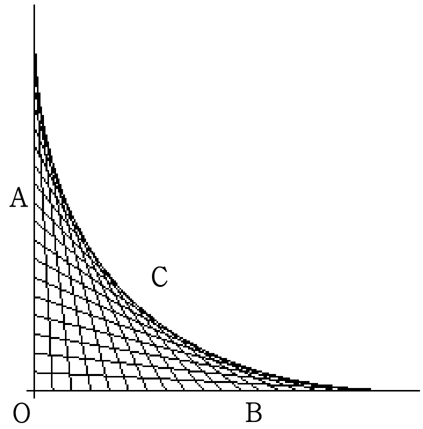
<u>포물선과 원</u>: 포물선과 원은 최대 4개의 점에서 만날 수 있다. 이것은 포물선의 방정식 $y=ax^2+bx+c$을 원의 방정식 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$에 대입한 방정식이 x에 관한 4차방정식인 것과 관련된다. 이 때문에 포물선과 원이 접하는 조건을 중근조건으로 파악하기는 용이하지 않다. 포물선과 원을 직접 관련짓는 대신, 포물선과 원이 접할 조건을 “접점에서 이 두 곡선이 공통인 접선을 갖는다”는 것에 의해 파악할 수 있다.

(다) 포락선(envelope): F가 곡선들의 집합이고 C가 곡선일 때, F에 속한 모든 곡선들이 각각 C

에 접하고, C 위의 각 점마다 그 점에서 C에 접하고 F에 속하는 곡선이 있을 때, C를 F의 포락선이라고 한다. <그림 2>는 F가 포물선들의 집합이고 직선 C가 이 포물선들의 포락선인 예이다. <그림 3>은 점 O에서 서로 수직으로 만나는 두 직선 위에 각각 위치한, $\overline{AO}+\overline{OB}$가 일정한 값이 되는 점 A와 점 B를 연결한 직선들의 포락선 C를 보여주고 있다.



<그림 2>



<그림 3>

※ 답안지에 풀이 과정을 반드시 쓰시오.

[문제 2-1] 미분을 사용하지 말고 다음 물음에 답하라.

(1) (5점) 직선 $y=mx+k$가 포물선 $x=ay^2+by+c$에 접할 조건을 a,b,c,m,k에 관한 등식으로 나타내어라.

(2) (5점) 포물선 $x=-y^2$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식을 구하라.

(3) (5점) 기울기 1인 직선이 포물선 $x=-y^2$과 중심이 $(p,0)$이고 반지름이 1인 원에 동시에 접할 때, p의 값을 구하라. (단, $p>0$)

[문제 2-2] 점 $P(0,1)$와 직선 $y=-1$ 위의 임의의 점 $Q(t,-1)$를 잇는 선분의 수직이등분선들의 집합의 포락선은 포물선이 된다. 이 포물선 C를 다음에 따라 구하라.

(1) (7점) 선분 PQ의 수직이등분선 ℓ_t의 방정식을 구하라.

(2) (7점) 모든 직선 ℓ_t에 접하는 포물선 C의 방정식을 구하라.

(3) (6점) 포물선 C 위의 임의의 점에 접하는 직선이 적당한 t에 대한 직선 ℓ_t가 됨을 보여라.

[문제 2-3] 아래의 그림과 같이 방정식이 $y=x^2$인 포물선 P에 바깥쪽으로부터 접하면서 동시에 x-축에 접하는 원 C의 중심 (p,q)에 대해 다음에 답하라. (단, $p>0$)

(1) (9점) P와 C의 접점의 좌표가 (t,t^2)일 때, p와 q를 t에 관한 식으로 나타내어라.

(2) (6점) 위에서 구한 식을 이용하여, 극한값 $\lim_{t\to\infty}\frac{p}{q}$를 구하라.