내일이 더 큰 사람, 당신은 아주대입니다

2009학년도 논술고사 예시문제

자연계열

고교명	고등학교
성 명	
이메일	

아주대학교 입학처

[문제 1](50 점) 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

제시문 1-1

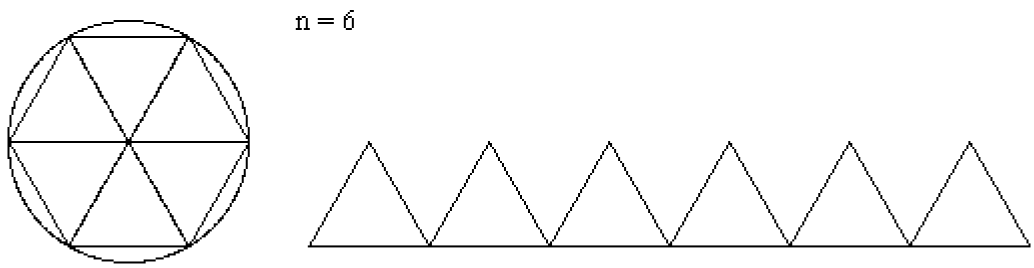
고대 그리스 최대의 수학자이며, 물리학자였던 아르키메데스는 고대 그리스의 식민지 시칠리아의 시라쿠사에서 천문학자인 피디아스의 아들로 태어났다. 당시 학문의 중심지였던 이집트의 알렉산드리아에 있는 왕립학교에서 공부한 그는 특히 이론과 실험 모두에 능했다고 한다.

지중해의 패권을 둘러싼 3 차에 걸친 로마와 카르타고의 전쟁 중 제 2 차 포에니 전쟁 때 시라쿠사는 카르타고의 편을 들어 로마 군의 공격을 정면으로 받게 되었다. 이 때, 아르키메데스는 이미 70 세를 넘은 고령이었지만, 투석기와 기중기 등 지렛대를 응용한 신형무기를 고안하여 로마의 대군을 크게 괴롭혔다. 시라쿠사가 함락되던 날, 그는 죽는 순간까지도 단순한 기술자가 아닌 기하학자로서의 면모를 보여 주었다. 그날 아르키메데스는 뜰의 모래 위에 도형을 그리며 기하학의 연구에 몰두하고 있던 중, 다가오는 사람 그림자가 로마 병사인 줄도 모르고 "물러서거라, 내 도형이 망가진다"고 외쳤다. 그러나 로마병사는 그를 몰라보고 그의 목을 내리침으로써 그는 생을 마감하게 된다. 생전 아르키메데스는 기하학의 증명, 특히 원과 구에 대한 문제를 좋아했다고 하며, 그의 비석에는 구와 원기둥 모양이 새겨져 있다. 아르키메데스는 구와 원기둥의 부피와 넓이에 관한 발견을 가장 중요하고 아름다운 업적으로 여겼다고 한다. 아르키메데스가 구와 원기둥을 좋아한 이유는 무엇일까?

제시문 1-2

잘 알려진 바와 같이 수 π는 "원의 둘레/지름"으로 정의된다. 따라서 반지름 r인 원의 둘레 C에 대한 공식 $C = 2\pi r$이 성립한다. 원의 넓이는 어떻게 구할 수 있을까? 원의 넓이를 표현하기 위하여 새로운 수를 정의할 필요는 있을까? 아르키메데스는 이 질문에 능숙하게 접근하였다. 원주와 반지름을 이용하여 원의 넓이에 대한 적당한 부등식을 얻고 이를 통하여 원의 넓이를 구한 것이다.

반지름 r 인 원의 넓이에 대한 한 부등식은 원에 내접하는 정 n-각형으로부터 얻어진다. 이 다각형은 원의 중심에서 만나는 n 개의 합동인 삼각형들로 분해할 수 있다. 아래 그림은 $n = 6$인 경우를 보여주고 있다.



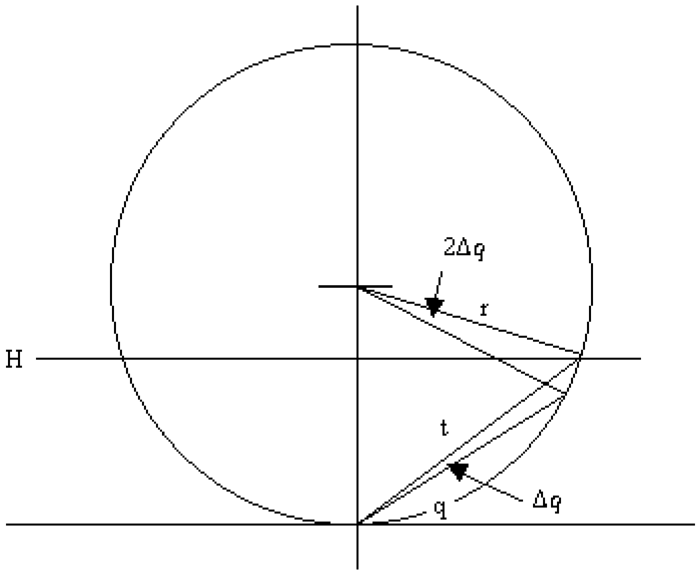
이 삼각형들의 바깥쪽 선분들은 원의 둘레를 근사하게 된다. 선분은 주어진 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선이므로 이 바깥쪽 선분들의 합은 원의 둘레보다 작다. 바깥쪽 선분을 밑변으로 한 삼각형들의 높이는 원의 반지름보다 짧다. n이 점점 커짐에 따라 바깥쪽 선분들의 길이의 합은 원의 둘레에 한없이 가까워지며 높이는 반지름에 한없이 가까워진다. 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot$(밑변)$\cdot$(높이)이므로 다각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot$(밑변의 길이의 합)$\cdot$(높이)이다. 넓이가 $\frac{1}{2}rC$ 에 한없이 가까운 원에 내접하는 정 n각형을 고려하면 원의 넓이가 $\frac{1}{2}rC$ 보다 작을 수 없음을 알 수 있다.

내접하는 정 n각형 대신 외접하는 정 n각형을 고려하면 비슷한 방법으로 원의 넓이가 $\frac{1}{2}rC$ 보다 클 수 없음을 알 수 있다.

이로부터 원의 넓이는 $\frac{1}{2}rC$가 됨을 알 수 있다. 원주의 길이에 대한 공식 $C = 2\pi r$로부터 원의 넓이 A에 대한 공식 $A = \pi r^2$을 얻는다.

제시문 1-3

이제 구에 대한 문제로 넘어가자. 구면의 넓이는 어떻게 주어지는가? 아르키메데스는 보다 일반적인 질문에 대한 답을 제시하였다. 이는 구면을 평면으로 잘라서 얻어진 부분의 넓이를 일반적으로 기술하는 것이다. 구체적으로, 평면에 의하여 잘린 구면 부분의 넓이는 영역의 중심으로부터 잘려서 생긴 원의 둘레에 이르는 거리를 반지름으로 갖는 원의 넓이와 같다는 것이다.



이를 증명하기 위하여 구면을 수평의 평면으로 자른 측면도를 살펴 보자. 아르키메데스의 결과는 평면 H 아래쪽의 넓이가 반지름 t 인 원의 넓이와 같다는 것이다. 이 사실은 H 가 구면의 아래쪽에서 접한다면 당연히 성립한다. 우리는 H 의 높이 (또는 각 q)에 대한 넓이의 변화율을 이용하여 아르키메데스의 결과를 보이려고 한다. 원의 넓이를 이용하여 계산한 넓이의 공식을 $A(q)$, 구면의 넓이를 $S(q)$라고 하자.

㉠ 우선 $t = 2r\sin q$이다. 미분 공식을 적용하여 $\frac{dt}{dq} = 2r\cos q$을 얻고 이로부터, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dA}{dq} = 4\pi rt \cos q$$

평면에 의하여 잘려진 구면의 넓이가 각의 변화 Δq에 따라 어떻게 변화하는지를 살펴보자. ㉡ 각이 Δq 만큼 변화하면 구의 중심으로부터 각의 변화는 $2\Delta q$가 된다. 각 $2\Delta q$에 대응하는 호의 길이는 $2r\Delta q$이 되고 이는 각의 변화에 대응하는 잘려진 띠 모양의 구면 영역의 너비에 해당한다. 띠 모양의 둘레는 $2\pi t \cos q$로 근사되므로 넓이의 변화량에 대한 다음 근사식을 얻고

$$\Delta S \approx 4\pi rt \cos q \;\; \Delta q$$

이로부터 다음 결론을 얻는다.

$$\frac{dS}{dq} = 4\pi rt \cos q$$

한편, 평면이 구면의 아래에 접하는 경우는 당연히 $A = S = 0$이므로 $A(q) = S(q)$임을 알 수 있다. 특별히 평면 H를 구면의 위쪽 끝점과 접하도록 잡으면 구면의 넓이 $4\pi r^2$을 얻게 된다. 이는 아르키메데스가 가장 중요하게 생각한 결과 중 하나인데, 구면의 넓이가 동일한 반지름을 가진 원의 넓이의 4 배가 되기 때문이다. 물론, 오늘날에는 초등학생들도 이 결과를 알고 있지만 이 사실이 알려지지 않은 시대의 이 발견은 아름답다고 할 수 밖에 없다.

원기둥은 어디에 등장하는가? 밑면의 반지름이 r 이고 높이가 $2r$ 인 원기둥의 옆 넓이는 $(2\pi r)(2r) = 4\pi r^2$ 이므로 이는 내접하는 구면의 넓이와 같다. 아르키메데스는 넓이가 일치할 뿐 아니라 원기둥에 수직인 평면으로 잘린 넓이들이 같음을 보인 것이다.

[문제 1-1](10점) 반지름 r인 원에 내접하는 정 n-각형과 외접하는 정 n-각형의 넓이를 각각 구하라.

[문제 1-2](10점) 제시문의 내용을 이용하여 다음 식이 성립함을 보여라.

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} n \tan\frac{\pi}{n} = \pi$$

[문제 1-3](10점) 제시문의 밑줄 친 ㉠, ㉡ 부분을 간략히 설명하라.

[문제 1-4](10점) 다음 영역의 넓이를 구하라.

$$\{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 = 4^2, -2 \le x + 2y + 2z \le 4\}$$

[문제 1-5](10점) 반지름 R인 구면의 북극으로부터 높이 h 인 곳에서 구면을 바라보면 보이는 부분의 넓이는 얼마인가?

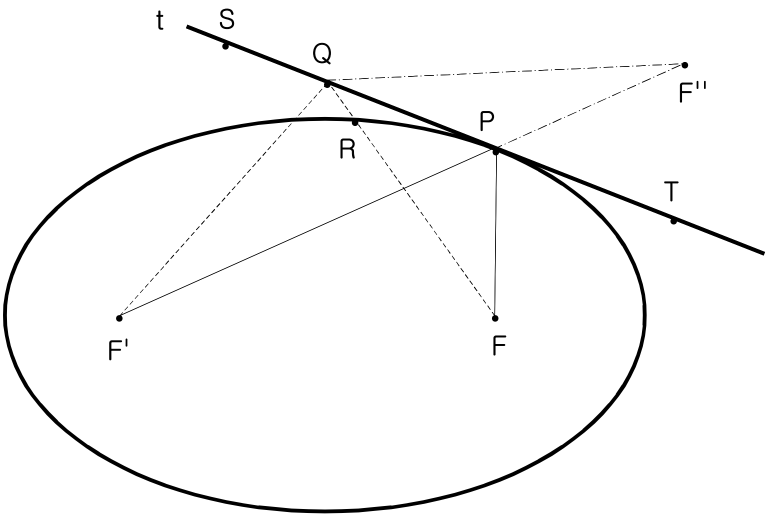
[문제 2](50점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

태양 둘레를 돌고 있는 행성들의 공전궤도는 모두 타원이다. 공전 궤도가 타원인 것은 인공위성과 국제우주정거장(ISS)을 포함한 모든 위성들의 경우도 마찬가지다. 행성의 공전궤도가 태양을 한 초점으로 하는 타원인 것을 처음으로 밝힌 사람은 독일의 천문학자 케플러(Johannes Kepler, 1571-1630)이다. 그는 처음에 행성의 공전궤도가 원일 것으로 생각했으나 스승 티코 브라헤의 관찰 자료를 연구하여 화성의 공전궤도가 타원임을 밝혔다. 우리는 흔히 찌그러진 원을 모두 타원이라고 부르지만, 한 방향으로는 일정비율로 늘어나면서 동시에 그와 수직인 방향으로는 일정비율로 줄어들게 찌그러질 때에만 정확하게 타원이 된다. 타원은 원기둥이나 원뿔을 비스듬히 자른 단면에서도 나타난다.

기하학적으로는 두 정점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들로 이루어진 평면 위의 곡선을 타원이라 한다. 이 때 두 정점을 타원의 초점이라 하고, 두 초점을 지나는 직선이 타원에 의해 잘려진 선분을 장축, 장축의 수직이등분선이 타원에 의해 잘려진 선분을 단축이라 하며, 장축과 단축의 교점을 타원의 중심이라 한다. 그리고 장축과 단축의 끝점을 타원의 꼭지점이라 한다.

초점이 각각 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$이고 두 초점으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 된다 (단, $b^2=a^2-c^2$). 그리고, 이 타원 위의 한 점 (x_1,y_1)에서 그은 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이 된다.

타원은 중요한 광학적인 특성을 가지고 있다. 타원의 한 초점에서 퍼져나간 빛이 타원에서 반사되면 다른 초점에 모이게 된다. 이와 같은 성질은 타원 위의 임의의 점에서 그은 접선에 대해 접점과 각 초점을 연결하는 직선이 이루는 각이 같기 때문이다.



위 그림에서 F, F'은 타원의 두 초점이고, t는 타원 위의 임의의 한 점 P에서 그은 접선이고, F''은 접선 t에 대한 초점 F의 대칭점이며, S와 T는 접선 t 위에 P의 양쪽으로 하나씩 잡은 점이다. 그리고, Q는 접선 t 위에서 P와 다르게 임의로 잡은 점이며, R은 선분 QF가 타원과 만나는 점이다. 그러면,

(1) $$F'Q+QF=F'Q+QR+RF$$

인데, $\triangle F'QR$에서 $F'Q+QR>F'R$이므로

(2) $$F'Q+QR+RF>F'R+RF$$

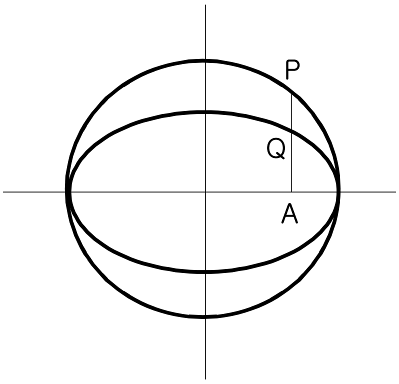
이다. R과 P는 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의해

(3) $$F'R+RF=F'P+PF$$

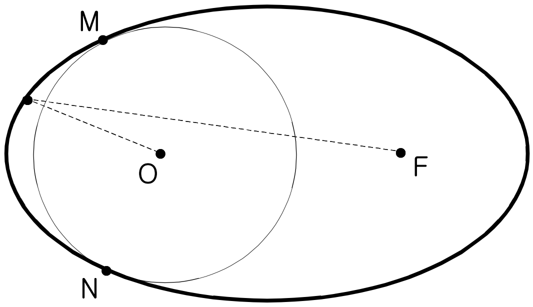
이다. 그러므로 (1), (2), (3)에 의해 $F'Q+QF>F'P+PF$를 얻게 되는데, 이로부터 두 초점으로부터 접선 t 위의 한 점에 이르는 거리의 합은 접점 P에서 최소가 됨을 알 수 있다. 한편, $F'Q+QF=F'Q+QF''$이고 $F'Q+QF''$이 최소일 때는 세 점 F', Q, F''이 한 직선 위에 있을 때이기 때문에, F', P, F''은 한 직선 위에 있게 된다. 따라서, $\angle F'PS=\angle F''PT=\angle FPT$가 된다. 즉, 타원 위의 임의의 점에서 그은 접선에 대해 접점과 각 초점을 연결하는 직선이 이루는 각은 같게 된다.

런던의 성 바오로 대성당은 '속삭이는 회랑(whispering gallery)'이라는 신비한 장소로 유명하다. 돔 아래의 회랑(원형 모양의 복도) 한 쪽에서 속삭인 소리는 회랑의 건너편 쪽에서 더 잘 들린다. 성 바오로 대성당의 돔을 이루는 타원형 천정이 신비한 현상의 원인이다. 타원의 초점에 해당하는 곳에서 소리를 내면 이 소리는 사방으로 퍼져가지만 타원형 천정에 도달하여 반사된 소리는 모두 건너편 초점에 해당하는 위치에 다시 모이게 된다. 그래서 타원의 한 초점에서 낸 소리는 다른 초점에서 아주 또렷이 들리게 되는 것이다.

[문제 2-1](10점) 원을 한쪽 방향으로 일정비율로 축소하면 타원이 된다는 것을 다음과 같이 보여라. 원 $x^2+y^2=a^2$과 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>b>0$)에 대해 x축 위의 점 $A(x_0,0)$ (단, $-a<x_0<a$)를 지나는 수직선이 그림과 같이 원과 만나는 점을 P, 타원과 만나는 점을 Q라고 할 때, 두 선분 AQ와 AP의 길이의 비 $\frac{AQ}{AP}$를 구하고 이 비가 일정함을 보여라.



[문제 2-2](10점) 아래 그림과 같이 타원 E 위의 서로 다른 두 점 M과 N에서 타원 E에 접하는 원 C가 있다. 이 때 원 C의 중심 O는 타원 E의 초점이 될 수 없음을 타원의 정의를 이용하여 설명하라.



[문제 2-3](15점) 위 문제에서처럼 원 C를 타원 E 위의 서로 다른 두 점 M과 N에서 접하게 하면서 반지름을 줄여가면 두 접점 M, N은 타원의 한 꼭지점에 접근한다. 이 때 원 C의 중심 O는 타원의 한 초점에 접근하는지를 다음과 같은 과정으로 판단해 보라.

(1) 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 초점좌표는 $(c,0)$과 $(-c,0)$ (단, $b^2=a^2-c^2$), 점 M의 좌표는 (x_1,y_1)이라 할 때, 직선 MO의 방정식을 구하고, 이것에 의해 원의 중심 O의 x-좌표를 a와 c와 x_1에 관한 식으로 나타내어라.

(2) x_1이 $-a$에 접근할 때, 원의 중심 O의 x-좌표의 극한값을 구하라.

(3) (2)의 결과를 이용하여, M이 꼭지점에 접근할 때 중심 O가 타원의 초점에 접근하는지를 판단하라.

[문제 2-4](15점) 초점이 $F(3,0)$과 $F'(-3,0)$인 타원 E: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$과 직선 l: $x=7$이 있다. 직선 l 위에서 점 $P(7,p)$가 $-\frac{24}{7}\leq p\leq\frac{24}{7}$인 범위에서 움직이면서 초점 F'을 향해 빛을 비추고 있다. 이 빛이 타원에서 반사되어 직선 l 위의 점 $Q(7,q)$를 지난다고 할 때, q의 범위를 구하라.