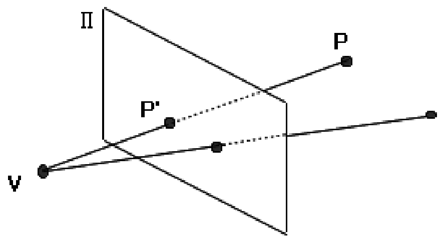
※ (**1 번 문항**) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문 가.

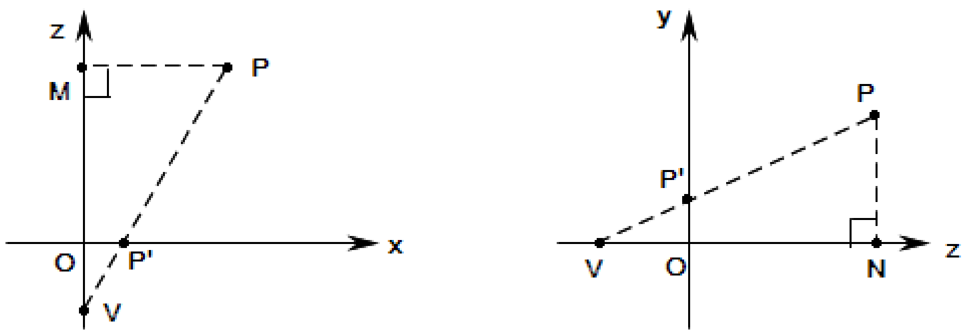
삼차원공간에 있는 형태를 이차원평면에 나타내는 한 가지 방법으로 투시도가 있다. 투시도는 시점 V와 투시도면 Π가 정해지면 [그림 1]과 같이 공간의 점 P를 이 점과 시점을 지나는 직선이 투시도면과 만나는 점 P'에 대응시키는 방식으로 그려진다.



[그림 1]

좌표계를 도입하면 이 대응관계를 좌표들 사이의 관계식으로 나타낼 수 있다. 투시도법에서는 투시도면이 xy-평면이 되고, 관찰 대상은 z-좌표가 양인 쪽에, 그리고 시점은 z-좌표가 음인 쪽에 놓이게 되는 좌표계를 보통 사용한다. 이렇게 설정되는 좌표계는 일반적인 공간 좌표계와는 z-축의 방향이 반대로 되어 있다.

시점이 $V(0,0,-c)$일 때 (단, $c>0$) 관찰 대상인 공간의 점 $P(x,y,z)$와 투시도면의 대응되는 점 $P'(x',y',0)$ 사이의 관계를 다음 [그림 2]를 통해 알아 보자.



[그림 2]

왼쪽 그림은 y-축의 양의 방향에서 내려다 본 그림이다. 이 그림에서 $VO=c$, $VM=z+c$, $OP'=x'$, $MP=x$이고 삼각형 VOP'과 삼각형 VMP가 닮은꼴이므로 $x':x=c:z+c$이다. 이로부터

(1) $$x'=\frac{cx}{z+c}$$

를 얻을 수 있다. 같은 식으로 x-축의 양의 방향에서 바라본 오른쪽 그림에서 $VO=c$, $VN=z+c$, $OP'=y'$, $NP=y$이고 삼각형 VOP'과 삼각형 VNP가 닮은꼴이므로 $y':y=c:z+c$이고, 이로부터

(2) $$y' = \frac{cy}{z+c}$$

를 얻을 수 있다.

투시도가 가진 두드러진 특징은, 공간에 있는 평행인 두 직선이 투시도면에 평행이 아니면 이 두 직선에 대응되는 투시도면 위의 이미지는 소실점이라고 불리는 한 점에서 만나는 두 반직선이 된다는 것이다. 이를 설명하기 위해서는 공간의 직선을 방정식으로 나타내는 방법에 대한 설명이 필요하다.

평면의 직선은 이 직선 위의 임의의 점의 좌표가 (x,y)일 때 x와 y에 관한 일차방정식으로 나타낼 수 있다. 그러나 공간의 직선은 이 직선 위의 임의의 점의 좌표가 (x,y,z)일 때 x, y, z 사이의 일차방정식 하나로 나타낼 수 없다. 그래서 공간의 직선은 보통 일차연립방정식이나 매개변수방정식으로 나타낸다.

공간에 직선 ℓ이 있고, 이 직선이 서로 다른 두 점 $A(x_0,y_0,z_0)$와 $B(x_1,y_1,z_1)$을 지난다고 하자. 직선 ℓ위의 임의의 점을 $P(x,y,z)$라고 하면 다음과 같은 비례식이 성립한다.

(3) $$x_1-x_0 : y_1-y_0 : z_1-z_0 = x-x_0 : y-y_0 : z-z_0$$

즉,

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

가 성립한다. 이제 이 공통 값을 변수 t라 두고 x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0를 간단히 상수 p, q, r로 두면 직선 ℓ은

(4) $$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다. 상수 p, q, r은 이 직선의 방향을 나타내기 때문에 방향비라 하고, 변수 t는 매개변수라 하며, (4)를 직선 ℓ의 매개변수방정식이라 한다. 예를 들면, 공간 내의 두 점 $(1,2,-1)$과 $(2,-1,3)$을 지나는 직선은 방향비가 1, -3, 4이므로 매개변수방정식은

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

이다.

공간 내의 평행인 직선들은 방향비가 같은 매개변수방정식으로 나타낼 수 있다. 소실점에 대해 설명하기 위해 투시도면에 평행하지 않은 공간 내의 한 직선 ℓ위의 임의의 점을 $P(x,y,z)$라 하고 이 직선의 매개변수방정식이 위의 식 (4)로 주어졌다고 하자. 이 경우 $r \neq 0$이고, 필요하면 방향비

의 부호를 전체적으로 바꾸어서 $r>0$이 되게 할 수 있다. 점 P의 투시도면 위의 대응점을 $P'(x',y',0)$이라 하고 시점이 $V(0,0,-c)$라 하면, (1)과 (2)에 의해

$$\begin{cases} x' = \dfrac{c(x_0+pt)}{(z_0+rt)+c} = \dfrac{cx_0+cpt}{c+z_0+rt} \\ y' = \dfrac{c(y_0+qt)}{(z_0+rt)+c} = \dfrac{cy_0+cqt}{c+z_0+rt} \end{cases}$$

이다. 그러므로 $t\to\infty$일 때, 즉 시점에서 멀어질 때, 점 P'은 투시도면 위의 점 $Q\left(\frac{cp}{r},\frac{cq}{r},0\right)$에 접근한다. 그런데, 이 점 Q의 좌표는 직선 ℓ의 방향비와 시점의 좌표에 의해 결정되므로 ℓ과 평행인 직선들은 투시도면에서 이 점 Q를 향해 뻗어 있다. 즉, 직선 ℓ에 대응되는 투시도면 위의 이미지 ℓ'의 소실점 Q에서 모두 만난다. 한편, ℓ'의 소실점은 시점을 지나고 직선 ℓ에 평행인 직선이 투시도면과 만나는 점인 것을 확인할 수 있다.

1-1. <10 점> 시점이 $V(a,b,-c)$일 때, 공간의 점 $P(x,y,z)$와 투시도면 위의 대응점 $P'(x',y',0)$사이의 관계에 의해 x'과 y'을 각각 x, y, z의 식으로 나타내어라.

1-2. <10 점> 공간의 점 $A(7,1,3)$과 $B(6,2,4)$에 대응되는 투시도면 위의 점이 각각 $A'\left(\frac{9}{2},-2,0\right)$과 $B'\left(\frac{26}{7},-2,0\right)$일 때, 시점 V의 좌표를 구하라.

1-3. <10 점> 시점이 $V(1,2,-3)$일 때, 매개변수방정식 $x=3+2t$, $y=3-3t$, $z=3+t$로 주어지는 공간 내의 직선 ℓ의 투시도면 위의 이미지 ℓ'의 소실점의 좌표를 구하라.

1-4. <20 점> 공간에 xz-평면에 평행인 정사각형 $ABCD$가 있다. 변 AB가 투시도면에 수직이고, 꼭지점 A, B, C, D에 대응되는 투시도면 위의 점이 각각 $A'\left(-\frac{8}{13},\frac{23}{13},0\right)$, $B'\left(-\frac{3}{8},\frac{9}{4},0\right)$, $C'\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4},0\right)$, $D'\left(\frac{17}{13},\frac{23}{13},0\right)$이다.

① <7점> 직선 $A'B'$의 소실점 S의 좌표를 구하라.

② <7점> 직선 $A'C'$의 소실점 T의 좌표를 구하라.

③ <6점> 시점 V의 좌표를 구하라.

※ (**2 번 문항**) 다음 제시문들을 읽고 물음에 답하시오.

제시문 나.

큰 값을 갖는 양을 분석하고 문제 해결 방법의 효율성을 이해하는 데 도움을 주는 표기법으로 O 표기법이 있다. a 이상의 실수들의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 있고 함수 $g(x)$는 양수 값만을 가진다고 하자. 적당한 상수 C가 존재하여 임의의 $x \geqq a$에 대하여 $|f(x)| \leqq Cg(x)$가 성립할 때

$$\boxed{f(x) = O(g(x)), \qquad (x \geqq a)}$$

라고 표기한다.

예를 들어 다음과 같은 표기가 가능하다:

$$3x + 2 = O(x^2 + 1), \qquad (x \geqq 0).$$

이 사실을 확인해 보자. 우선 $0 \leqq x \leqq 1$인 경우 $x + 1 \leqq 2 \leqq 2(x^2 + 1)$이 성립하고 $x > 1$인 경우 $x + 1 \leqq x^2 + 1 \leqq 2(x^2 + 1)$이 성립한다. 따라서, 임의의 양의 실수 x에 대하여 $x + 1 \leqq 2(x^2 + 1)$이 성립하므로 아래 부등식을 얻는다:

$$|3x + 2| = 3x + 2 \leqq 3(x + 1) \leqq 6(x^2 + 1).$$

O 표기법이 등식의 의미를 가지는 것은 아니다. 예를 들어, $x^2 + 1 \leqq 2(x^4 + 1)$으로부터 다음과 같은 표기도 가능하다:

$$3x + 2 = O(x^4 + 1), \qquad (x \geqq 0).$$

이와 유사하게 a 이상의 자연수들의 집합에서 정의된 함수에 대해서도 같은 표기법을 사용하기로 한다.

O 표기법과 관련하여 다음 성질들이 성립한다:

- $f(x) = O(g(x))$이면, $kf(x) = O(g(x))$이다. 여기서, k는 상수이다.
- $f_1(x) = O(g(x))$이고 $f_2(x) = O(g(x))$이면, $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$이다.
- $f_1(x) = O(g_1(x))$이고 $f_2(x) = O(g_2(x))$이면, $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$이다.
- $f(x) = O(g(x))$이고 $g(x) = O(h(x))$이면, $f(x) = O(h(x))$이다.

이 성질들을 이용하여 다음 결과들을 확인할 수 있다:

- $\alpha < \beta$이면, 아래 식이 성립한다.

$$x^\alpha = O(x^\beta), \qquad (x \geqq 1).$$

- $\alpha < \beta$이면, 아래 식은 성립하지 않는다:

$$x^{\beta} = O(x^{\alpha}), \qquad (x \geqq 1).$$

- d-차 다항식 $P(x)$에 대하여 아래 식이 성립한다:

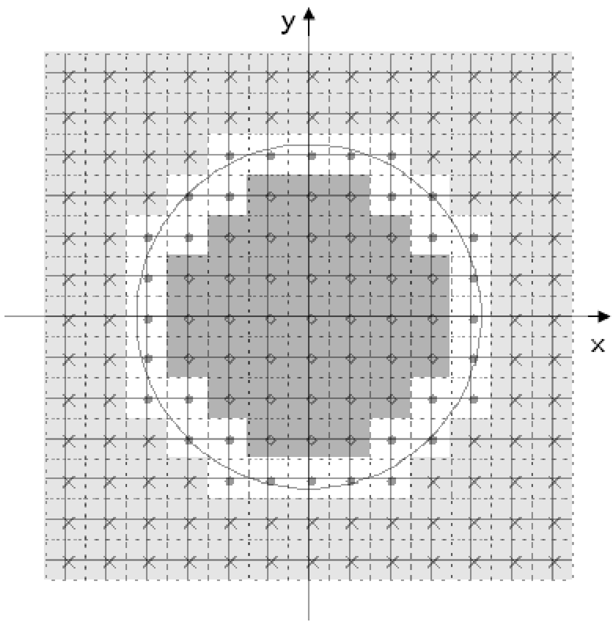
$$P(x) = O(x^{d}), \qquad (x \geqq 1).$$

제시문 다.

정수를 좌표로 갖는 평면상의 점들을 격자점이라 한다. 격자점 이론 또는 격자점 문제는 주어진 영역에 들어 있는 격자점의 개수에 관한 것이다. 격자점 하나를 그 격자점을 중심으로 하고 한 변의 길이가 1 인 정사각형에 대응시키면 주어진 영역에 들어 있는 격자점의 개수를 영역의 넓이로 근사할 수 있다.

양의 실수 r에 대하여 $S(r) = \{(x, y) : |x| + |y| \leqq r\}$이라고 하자. 영역 $S(r)$의 넓이를 $A_S(r)$, 영역 $S(r)$에 들어 있는 격자점의 개수를 $N_S(r)$이라고 하자. $N_S(r)$을 $A_S(r)$로 근사할 때 생기는 오차를 $E_S(r)$이라 하면 $N_S(r) = A_S(r) + E_S(r)$이 성립한다.

양의 실수 r에 대하여 $D(r) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq r^2\}$이라고 하자. 영역 $D(r)$의 넓이를 $A_D(r)$, 영역 $D(r)$에 들어 있는 격자점의 개수를 $N_D(r)$이라고 하자. $N_D(r)$을 $A_D(r)$로 근사할 때 생기는 오차를 $E_D(r)$이라 하면 $N_D(r) = A_D(r) + E_D(r)$이 성립한다. 일반적으로 $N_D(r)$을 정확히 계산하기는 쉽지 않다.



[그림 3]

[그림 3]은 $N_D(r)$을 이해하는 데 도움을 준다. 영역 $D(r)$에 들어 있는 격자점 중 대응하는 정사각형이 $D(r)$의 경계와 만나지 않는 것의 개수를 $N_1(r)$, 대응하는 정사각형이 $D(r)$의 경계와 만나는 것의 개수를 $N_2(r)$이라고 하자. 그리고, $D(r)$의 외부에 있는 격자점 중 대응하는 정사각형이 $D(r)$

의 경계와 만나는 것의 개수를 $N_3(r)$이라 하자. 그러면, $N_D(r) = N_1(r) + N_2(R) \leqq A_D(r) + N_2(r)$이다. 한편, $A_D(r) \leqq N_1(r) + N_2(r) + N_3(r) = N_D(r) + N_3(r)$ 이 성립한다. 이 두 부등식으로부터 $|E_D(r)| \leqq N_2(r) + N_3(r)$임을 알 수 있다.

2-1. <10점> **제시문 나**에 의하면 $x+1 = O(x^2+1)$, $(x \geqq 0)$이 성립한다. 임의의 $x \geqq 0$ 대하여

$$x+1 \leqq C(x^2+1)$$

를 만족하는 가장 작은 실수 C를 구하라.

2-2. <10점> 자연수 n에 대하여

$$f_1(n) = \frac{n^2}{n+1}, \qquad f_2(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_1(k+1) + f_1(k^2)\right)$$

으로 정의할 때 $f_2(n) = O(n^\alpha)$, $(n \geqq 1)$을 만족하는 가장 작은 실수 α를 구하라.

2-3. <5점> $N_D(6.5)$와 $N_S(6.5)$는 각각 얼마인가?

2-4. <10점> 다음 관계가 성립함을 보여라.

$$E_D(r) = O(r), \qquad (r \geqq 2).$$

2-5. <15점> N_S와 E_S에 관한 다음 물음에 답하라.

① <5점> 자연수 m에 대한 $N_S(m)$의 일반식을 구하라.

② <5점> $r = m + t$, (m은 자연수, $0 \leqq t < 1$)로 놓고 $E_S(r)$을 r과 t로 표현하라.

③ <5점> 아래 식을 만족하는 가장 작은 실수 β를 구하라.

$$E_S(r) = O\left(r^\beta\right), \qquad (r \geqq 2).$$