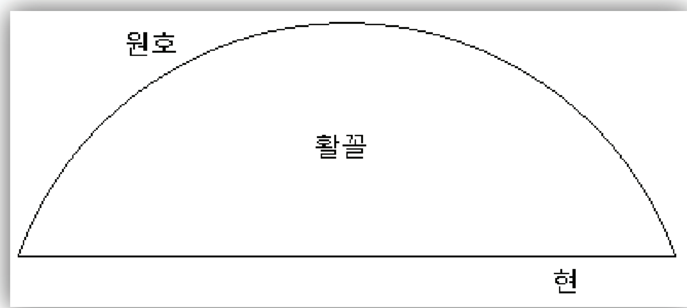
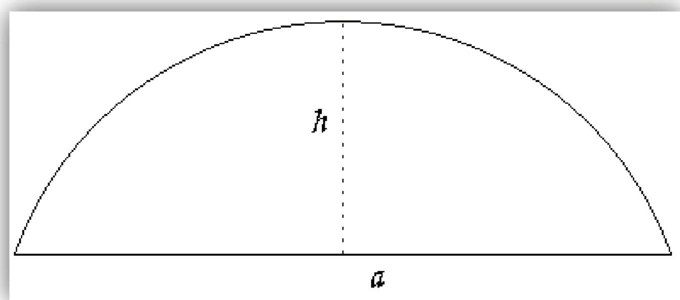
(**1 번 문항**) **<50 점>** 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

원 또는 원의 일부분의 넓이를 구하는 문제는 긴 역사를 가지고 있다. [그림 1]과 같이 원호와 현으로 둘러싸인 원의 일부분에 해당하는 도형을 활꼴이라고 한다.



[그림 1]

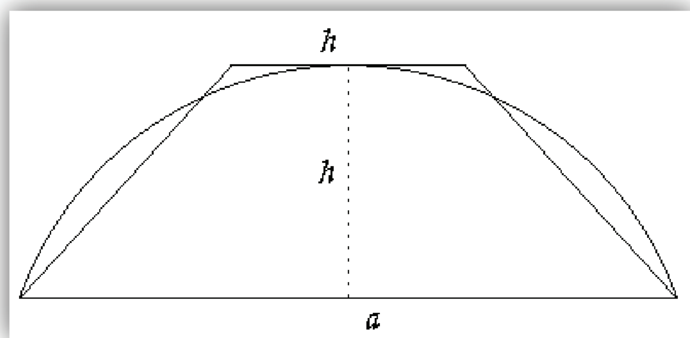
활꼴은 [그림 2]와 같이 현의 길이 a와 현으로부터 원호에 이르는 최대거리인 높이 h가 주어지면 결정된다.



[그림 2]

이때, 높이는 현의 중점에서 원호에 이르는 수직거리이기도 하다.

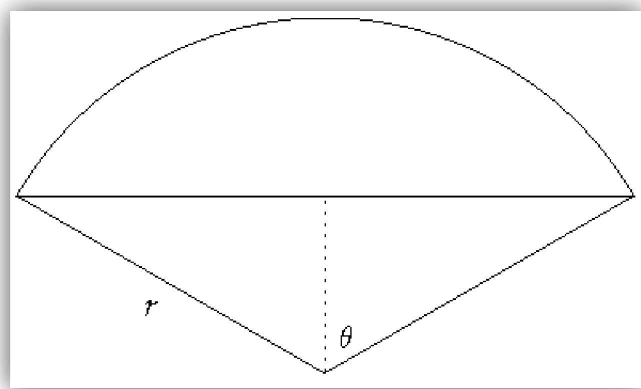
문헌에 의하면, 고대 중국과 이집트에서는 활꼴의 넓이를 근사적으로 구하기 위해 [그림 3]과 같이 윗변의 길이가 높이와 같은 사다리꼴을 이용하였다고 한다.



[그림 3]

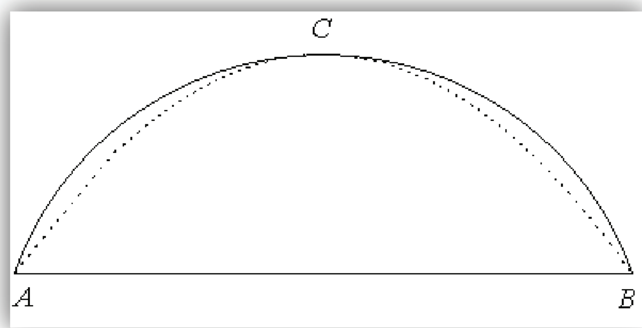
이 사다리꼴에 의한 근사공식이 얼마나 정확한지 알기 위해서는 활꼴의 넓이를 정확히 구할 수 있어야 한다.

활꼴의 넓이는 현의 길이와 높이로는 간단히 나타낼 수 없다. 그러나 [그림 4]와 같이 중심각 2θ와 반지름 r을 이용하면 삼각함수를 써서 넓이를 나타낼 수 있다. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



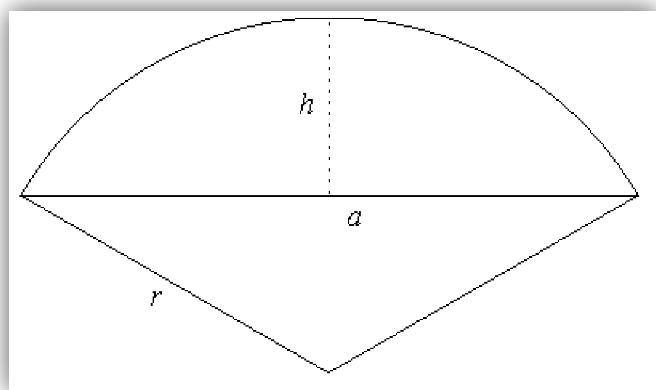
[그림 4]

포물선을 이용하여 활꼴의 넓이를 근사계산하는 방법이 있다. Archimedes는 포물선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이가 이 영역에 포함되는 삼각형의 최대넓이의 $\frac{4}{3}$ 배가 된다는 것을 밝혔다. 이를 이용하면 [그림 5]와 같이 활꼴의 양 끝점 A, B를 지나고 현에서 가장 먼 원호 위의 점 C에 접하는 포물선을 이용하여 활꼴의 넓이를 근사계산할 수 있다.



[그림 5]

1-1. <10점> 아래 그림과 같이 현의 길이가 a이고, 높이가 h인 활꼴이 반지름이 r인 원의 일부분이라고 할 때 r을 a와 h로 나타내어라.



1-2. <10점> [그림 4]와 같이 반지름이 r인 원에서 중심각 2θ에 대응하는 활꼴의 넓이 $A(r,\theta)$를 r과 θ와 삼각함수를 써서 나타내라.

1-3. <10점> [그림 3]의 활꼴이 반지름이 r인 원에서 중심각 2θ에 대응한다고 할 때, a와 h를 r과 θ와 삼각함수를 써서 나타내고, 이를 이용하여 [그림 3]의 사다리꼴의 넓이 $B(r,\theta)$를 r과 θ와 삼각함수를 써서 나타내라.

1-4. <10점> 포물선에 대하여 Archimedes가 발견한 사실을 이용하여 [그림 5]와 같이 활꼴을 포물선으로 근사시킨 넓이 $C(r,\theta)$를 r과 θ와 삼각함수를 써서 나타내라. 단, 주어진 활꼴은 반지름이 r인 원에서 중심각 2θ에 대응하는 활꼴이다.

1-5. <10점> θ가 0에 가까운 값일 때, $\sin\theta$와 $\cos\theta$는 각각 3차다항식 $\theta-\frac{1}{6}\theta^3$ 과 2차다항식 $1-\frac{1}{2}\theta^2$ 으로 근사된다.

(1) <3점> θ가 0에 가까운 값일 때, 위 근사식들을 이용하여 $A(r,\theta)$, $B(r,\theta)$, $C(r,\theta)$의 근사식을 θ에 대한 오름차순으로 나타내라.

(2) <7점> θ가 0에 가까운 값일 때, (1)에서 구한 식들을 이용하여 $\frac{B(r,\theta)}{A(r,\theta)}$ 와 $\frac{C(r,\theta)}{A(r,\theta)}$ 의 값을 상수로 근사하고, 이를 이용하여 사다리꼴에 의한 근사값과 포물선에 의한 근사값 중 어느 것이 활꼴의 넓이를 더 정확히 근사하는지 판정하라.

.

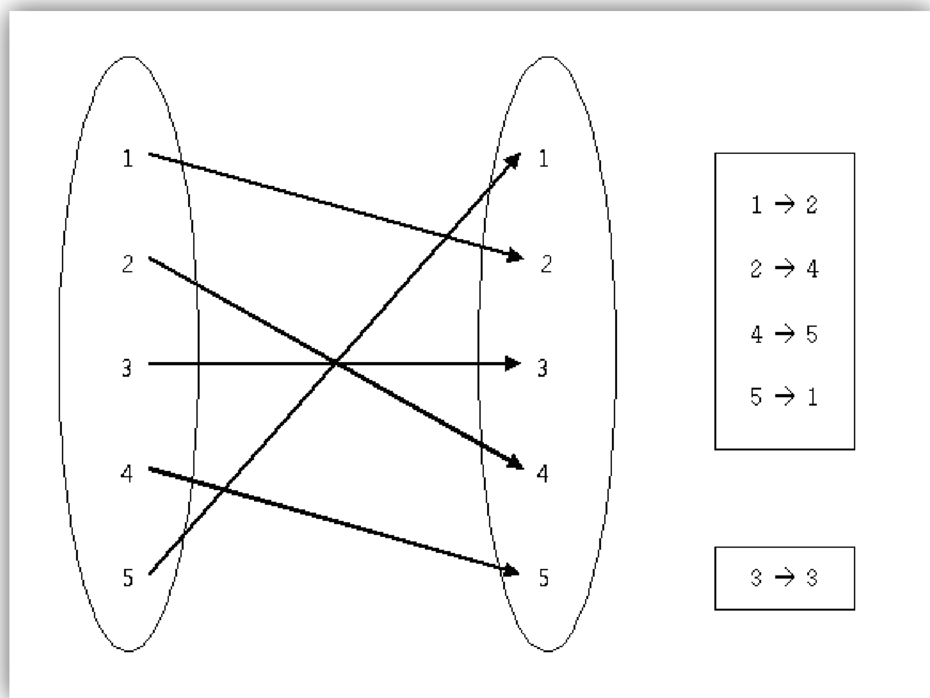
(**2 번 문항**) <**50 점**> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

사다리 타기는 우리 주위에서 흔히 볼 수 있는 놀이 중 하나이며 순번을 정하거나 술래를 정할 때 자주 사용된다. 사다리 타기의 원칙은 사다리를 따라 위에서 아래로 움직일 때 가로줄을 만나면 그 가로줄을 따라 바로 옆의 세로줄로 이동하는 것이다. 사다리를 구성하는 가로줄들은 인접한 세로줄들만을 연결하며 서로 만나지 않아야 한다. 사다리의 모양이 복잡해지면 혹시 한 항목이 여러 개와 연결되거나 아무 것과도 연결되지 않은 경우가 생길지 모른다는 생각이 들기도 한다. 그러나 어떤 모양으로 사다리를 그려도 각기 위와 아래 항목이 하나씩만 짝지워진다는 사실에는 변함이 없다.

2 이상의 자연수 N에 대하여 집합 $\{1,2,\cdots,N\}$을 A_N으로 표기하기로 하자. 집합 A_N에서 A_N으로의 일대일 대응을 N-치환(置換, permutation) 또는 간단히 치환이라고 한다. 항등 함수는 치환의 한 예이다. N-치환 σ를 아래와 같이 나타내기도 한다.

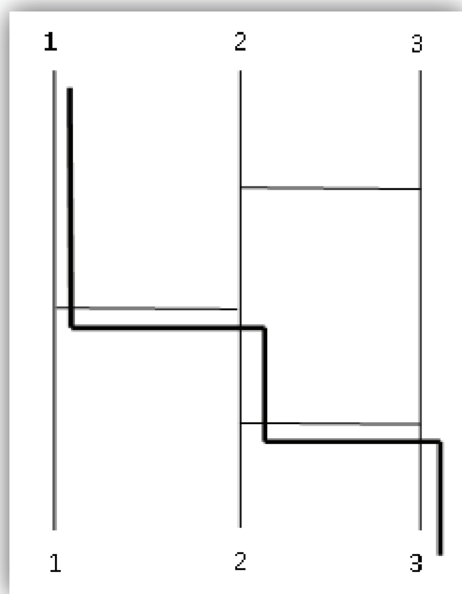
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

[그림 6]은 5-치환의 예로서 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.



[그림 6]

치환과 사다리는 서로 관련되어 있다. 세로줄의 시작번호와 끝 번호가 차례로 1, 2, ⋯, N인 사다리를 N-사다리라 하자. N-치환은 N-사다리를 표현하는 좋은 도구이다. [그림 7]의 3-사다리는 3-치환 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$과 동등하다.



[그림 7]

두 N-치환 σ_1, σ_2의 합성 $\sigma_2 \circ \sigma_1$를 N-치환의 곱이라고 부르고 $\sigma_2\sigma_1$로 쓰기로 한다. 두 N-치환의 곱도 여전히 N-치환이다. 임의의 N-치환 σ의 역함수 σ^{-1}도 N-치환이며 이를 σ의 역치환이라고 한다. 예를 들어 [그림 6]이 표현하는 치환의 역치환은 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$이고 [그림 7]의 3-사다리에 대응하는 3-치환의 역치환은 자기 자신이다.

집합 A_N에 속하는 서로 다른 n 개의 자연수 i_1, i_2, ⋯, i_n이 존재하여 $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, ⋯, $\sigma(i_{n-1}) = i_n$, $\sigma(i_n) = i_1$을 만족하고 나머지 원소들은 자신에게 대응시키는 치환 σ를 사이클이라고 하고 $\sigma = (\, i_1 \;\; i_2 \;\; \cdots \;\; i_n \,)$으로 표기하며 n을 σ의 길이(length)라고 한다. [그림 6]이 표현하는 치환은 길이가 4인 사이클 $(\,1 \;\, 2 \;\, 4 \;\, 5\,)$이다.

치환 중에서 두 원소만 서로 바꾸어 대응시키고 나머지는 자신에게 대응시키는 것을 호환(互換, transposition)이라고 한다. 즉, $1 \leqq i < j \leqq N$인 자연수 i, j에 대하여

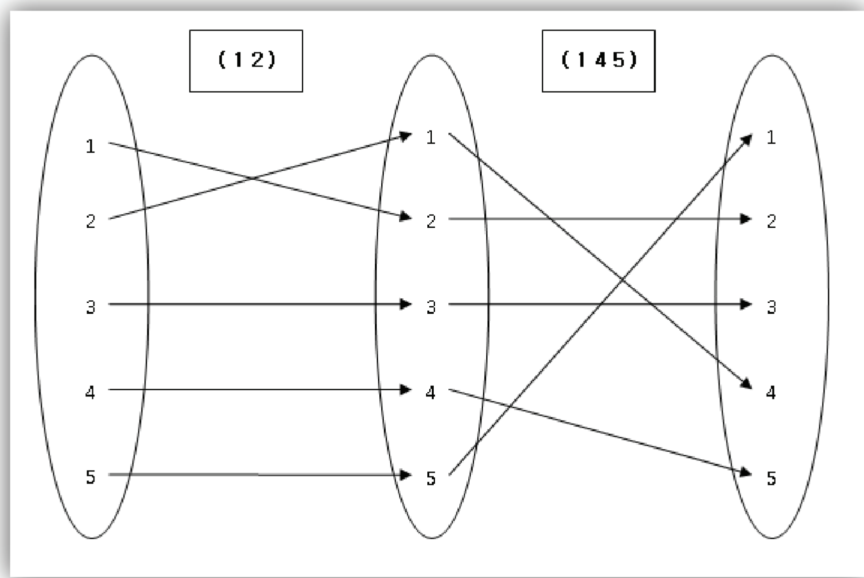
$$\sigma(k) = \begin{cases} j & (k = i) \\ i & (k = j) \\ k & (k \neq i, k \neq j) \end{cases}$$

로 주어지는 치환을 호환이라고 부르고 $(i\, j)$ 또는 $(j\, i)$로 나타내기로 한다. 호환은 길이가 2 인 사이클이다. 연속된 두 자연수로 구성된 호환을 인접 호환이라고 한다. 예를 들어, $(\,2 \;\, 4\,)$는 호환이며 인접 호환은 아니다. 한편, $(\,4 \;\, 5\,)$는 인접 호환이다. N-사다리의 가로줄은 인접 호환에 해당한다.

일반적으로 치환에 대하여 아래 정리가 성립한다.

정리. 모든 치환은 호환들의 곱으로 나타낼 수 있다.

[그림 8]은 치환의 곱 $(1\ 4\ 5)(1\ 2)$를 나타낸다. 합성함수의 정의로부터 이 치환은 [그림 6]이 표현하는 치환과 동일함을 알 수 있다. 즉, $(1\ 2\ 4\ 5) = (1\ 4\ 5)(1\ 2)$가 성립한다. 이와 비슷한 방법으로 $(1\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)$를 얻을 수 있다. 결과적으로 $(1\ 2\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 2)$가 성립한다.

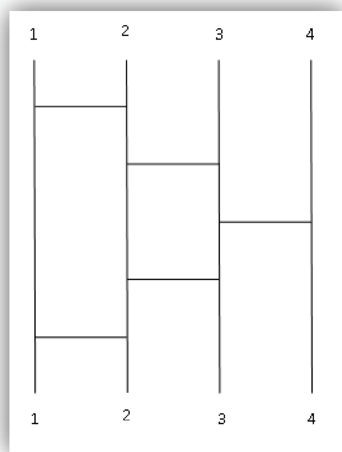


[그림 8]

서로 다른 세 자연수 i, j, k에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

㉠	$(i\ j)(j\ k)(i\ j) = (i\ k)$

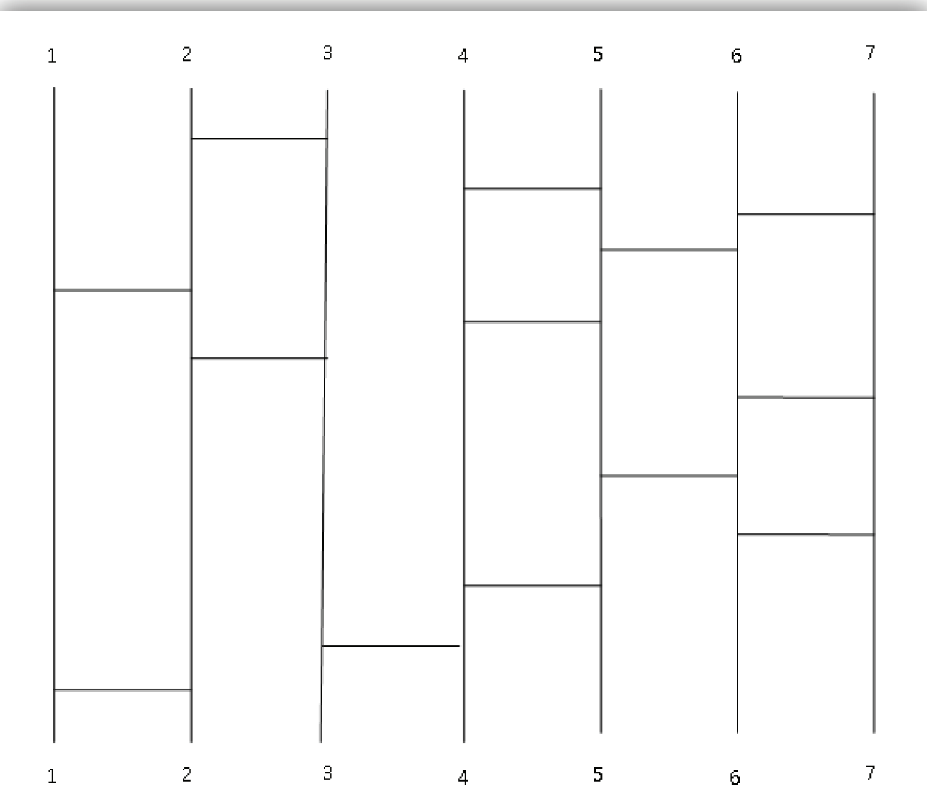
2-1. <5점> 다음 4-사다리를 치환으로 표현하라.



2-2. <5점> 길이 5인 사이클 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ 를 호환의 곱으로 표현하라.

2-3. <6점> 서로 다른 세 자연수 $i,\ j,\ k$에 대하여 제시문의 식 ㉠이 성립함을 보여라.

2-4. <6점> 아래 7-사다리에 대응하는 치환을 σ_1이라 하고,



$\tau_1 = (4\ 7),\ \sigma_2 = \tau_1\,\sigma_1$ 이라 하자. $\sigma_2 = \sigma_1\tau_2$ 를 만족하는 치환 τ_2를 구하라.

2-5. <18점> 다음 치환에 대하여 물음에 답하라.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) <6점> σ를 사이클들의 곱으로 표시하라.

(2) <6점> σ를 인접 호환들의 곱으로 표시하라.

(3) <6점> σ와 동등한 7-사다리를 그리라.

2-6. <10점> 주어진 임의의 N-치환에 대하여 이와 동등한 N-사다리가 존재함을 제시문의 내용을 이용하여 설명하라.