

## 자연계열 [문제 1] 출제의도 및 예시답안

### [출제의도]

본 문제는 분할, 순간변화율, 적분 등의 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 연립방정식과 정적분, 부피 계산에 응용할 수 있는 문제 해결 능력을 평가하는 데 목적이 있다.

### [예시답안]

#### 문제 1-A

(1) 이 문항은 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 100 \\ x + y + z = 60 \end{cases}$$

의 자연수해의 개수를 구하는 것이다. 위의 식에서 아래의 식을 빼 주면,  $x + y = 40$ 을 얻고 이로부터  $z = 20$ 을 얻는다. 따라서 연립방정식을 만족하는 자연수  $x, y, z$ 의 모든 순서쌍  $(x, y, z)$ 의 개수는  $x + y = 40$ 을 만족하는 자연수  $x, y$ 의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수와 같다.  $x + y = 40$ 을 만족하는 자연수  $x, y$ 의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수는 40을 두 개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같으므로,  $P(40, 2) = {}_{39}C_1 = 39$ 이다.

(2) 집합  $A$ 의 원소의 개수는  $2x + 2y + z = 100$ 을 만족하는 자연수  $x, y, z$ 의 순서쌍  $(x, y, z)$ 의 개수이다.

$x + y = k$ 라 하면,  $x, y$ 는 자연수이고,  $z = 100 - 2x - 2y = 2(50 - k)$ 도 자연수 이므로  $k$ 는 2 이상 49이하의 모든 자연수, 즉  $2 \leq x + y = k \leq 49$ 이다. 따라서  $z$ 는 2 이상 96 이하의 짝수이다. 이로부터  $2x + 2y + z = 100$ 을 만족하는 자연수  $x, y, z$ 의 순서쌍  $(x, y, z)$ 의 개수는  $2 \leq x + y = k \leq 49$ 을 만족하는 자연수  $x, y$ 의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수와 같다.

$x + y = k$ 를 만족하는 자연수  $x, y$ 의 모든 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수는  $P(k, 2) = {}_{k-1}C_1 = k - 1$ 이므로,  $2 \leq x + y = k \leq 49$ 을 만족하는 자연수  $x, y$ 의 모든 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수는

$$\sum_{k=2}^{49} P(k, 2) = \sum_{k=2}^{49} (k - 1) = \sum_{m=1}^{48} m = 1176$$

이다.

이 중에서  $x + y + z = 60$ 을 만족하는 자연수  $x, y, z$ 의 순서쌍  $(x, y, z)$ 의 개수는 문항 (1)로부터 39개 이므로, 집합  $A$ 의 원소 중에서  $x + y + z = 60$ 을 만족하지 않는 자연수  $x, y, z$ 의 순서쌍  $(x, y, z)$ 의 개수는  $1176 - 39 = 1137$ 개 이다.

#### 문제 1-B

시각  $t$ 에서 물탱크 안의 물의 양의 순간변화율은  $f(t) - g(t)$ 이다. 따라서  $t = 0$ 에서  $t = 2$ 까지 물탱크 물의 변화량(L)은 순간변화율을 적분하여 얻을 수 있다. 최초의 물의 양 10L를 더하면  $t = 2$ 에서 물의 양은

$$10 + \int_0^2 (f(t) - g(t)) dt$$

두 함수  $f(t)$ ,  $g(t)$  각각에 대한 정적분을 부분적분과 치환적분을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 4(t+2) \ln(t+2) dt \\ &= 2x^2 \ln x - x^2 \Big|_2^4 \\ &= 56 \ln 2 - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(t) dt &= \int_0^2 \frac{2 \ln(t+1)}{(t+1)} dt \\ &= \int_0^{\ln 3} 2u du \\ &= (\ln 3)^2 \end{aligned}$$

따라서  $t = 2$ 에 물탱크에 들어있는 물의 양은  $56\ln 2 - 2 - (\ln 3)^2$  (L) 이다.

[출제근거]

문제 1-A	수학 I : 연립방정식 확률과 통계 : 순열과 조합
문제 1-B	미적분 II : 지수함수와 로그함수, 적분법

ibhak.ssu.ac.kr

## 자연계열 [문제 2] 출제의도 및 예시답안

### [출제의도]

본 문제는 물체의 운동에 관한 개념을 이해하는지를 평가하고 있다. 문항 (1)에서는 이동거리, 변위, 속력, 속도 등 운동 관련된 기본 개념을, 문항 (2)에서는 운동량과 운동량 보존법칙을 이해하는지를 묻고 있다. 문항 (3)은 위 문항에서의 개념과 법칙을 기체의 분자 운동에 적용하였을 때, 기체의 확산 속도와 분자량 사이의 관계 및 기체의 평균 운동 에너지에 관한 이해도를 평가한다.

### [예시답안]

- (1) 두 물체 A, B 가 각각 x, y 축에서만 운동하므로, 두 물체가 만날 수 있는 위치는 원점이다. 그러므로, 두 물체가 만나게 되는 시간은, A 의 변위가 0 이고, B의 변위가 6이 되었을 때이다. 속도와 시간의 그래프에서 넓이가 변위에 해당하므로, 각 물체의 변위는 <그림 (b)> 에 주어진 그래프의 넓이를 계산하여 구할 수 있다.

시간	물체 A 변위(x축)	물체 B 변위(y축)
0	0	0
1	-1	1
2	-2	4
3	-1	7.5
4	0	10
5	-1	11
6	-2	10
7	-1	8
8	0	6

이로부터  $t=8$  (s) 일 때, 두 물체가 한 지점에서 만남을 알 수 있다.

- (2)  $t=8$  일 때, 두 물체의 속도는 <그림 (b)>로부터  $v_A=0$ (m/s)  $v_B=-2$ (m/s) 임을 알 수 있다.

완전 비탄성충돌에 의해 두 물체가 합쳐졌으므로, 합쳐진 물체의 질량은  $2m$  이다.

충돌 직후 합쳐진 물체의 속도를  $v$  라 두면, 운동량 보존법칙으로부터  $0+m(-2)=(2m)\times v$  이므로,  $v=-1$ (m/s) 이다.

즉, 속도 크기는 1 이고, 방향은  $-y$  (음의 y방향 혹은 아래쪽) 이다.

- (3) 수소 기체의 절대 온도는 300 K이고, 헬륨 기체의 절대 온도는 600 K이다. 기체 분자의 평균 운동에너지는 절대 온도에 비례하므로,  $2 \times \frac{1}{2}m_{H_2}v_{H_2}^2 = \frac{1}{2}m_{He}v_{He}^2$  이다. 또한, 수소의 분자량은 2이고 헬륨의 분자량은 4이므로,  $2 \times \frac{1}{2} \times 2v_{H_2}^2 = \frac{1}{2} \times 4v_{He}^2$  이다. 따라서  $v_{H_2}^2 = v_{He}^2$  이다. 즉, 수소 기체 분자와 헬륨 기체 분자의 운동 속도는 같다.

### [출제근거]

문제 2	제시문 (가)	물리 I: 시공간과 우주 물리 II: 힘과 운동
	제시문 (나)	과학: 태양계와 지구 화학 II: 다양한 모습의 물질