◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거(출제문제 해설 포함) ◆

자연계열 [문제 1] 출제의도 및 예시답안

[출제의도]

본 문제는 이차곡선, 접선의 방정식, 삼각함수, 연속확률변수 등의 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 이등분선과 조건부확률에 응용할 수 있는 문제 해결 능력을 평가하는 데 목적이 있다.

[요소별 배점 기준표]

<table>
<tr><th colspan="2">문항 번호</th><th>세부 평가항목</th></tr>
<tr><td rowspan="3">문제 1-A</td><td>(1)</td><td>- 타원 C 에 대한 기울기 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{8m^2+2}$
- $P(4,\sqrt{6})$를 지나는 기울기 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-4)+\sqrt{6}$
이므로, 기울기 m은 $\pm\sqrt{8m^2+2} = \sqrt{6}-4m$ 을 만족
- 이차방정식 $2m^2-2\sqrt{6}\,m+1=0$을 얻고, $m=\frac{\sqrt{6}\pm2}{2}$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>- 두 접선이 이루는 각은 $\theta=\theta_2-\theta_1$을 만족
- $\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)}{1+\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)}=\frac{4}{3}$
- 구간 $[0^\circ,90^\circ)$에서 $y=\tan\theta$는 단조증가함수이고 $\tan60^\circ=\sqrt{3}>\frac{4}{3}$ 이므로, $\theta<60^\circ$</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>- 각 θ의 이등분선 ℓ의 기울기는 $\tan\left(\theta_1+\frac{\theta}{2}\right)$
- $\tan\frac{\theta}{2}=t$로 치환하면 $\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$이고, θ는 예각이므로 $t=\frac{1}{2}$
- $\tan(\theta_1+\frac{\theta}{2})=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)+\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이고, 직선 ℓ의 방정식은
$y=\frac{\sqrt{6}}{3}(x-4)+\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문제 1-B</td><td>(1)</td><td>- 구형기계를 사용하는 사건을 A라 하면, 구형기계와 신형기계로부터 0.2kg 이하의 금이 생산될 확률은 각각
$P(W\le 0.2|A)=P(0.5X\le 0.2)$, $P(W\le 0.2|A^c)=P(0.6X\le 0.2)$
- $P(W\le 0.2|A)=P(0.5X\le 0.2)=P(X\le\frac{2}{5})=\int_0^{2/5}2-2x\,dx=\frac{16}{25}$
- $P(W\le 0.2|A^c)=P(0.6X\le 0.2)=P(X\le\frac{1}{3})=\int_0^{1/3}2-2x\,dx=\frac{5}{9}$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>- 원석가루 1톤으로부터 0.2 kg 이하의 금을 생산하는 사건을 B라 하면, 구해야 할 확률은
조건부 확률 $P(A|B)$이고, $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{1}{10}\cdot\frac{16}{25}+\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{9}$
- $P(A\cap B)=\frac{1}{10}\cdot\frac{16}{25}$이므로 $P(A|B)=\frac{16}{141}$</td></tr>
</table>

- 가점 요인: 정확한 근거의 논리적 제시, 공식 유도 능력 등을 종합적으로 판단하여 결정
- 감점 요인: 비논리적 전개, 불완전한 수식의 표현, 계산능력 부족 등을 종합적으로 판단하여 결정

* 가점, 감점은 총 15점 중 최대 1점까지로 제한한다.

[예시답안]

문제 1-A

(1) 중심이 원점에 놓인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 기울기 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

이므로, 타원 C 에 대한 기울기 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{8m^2+2}$$

이다. 한편 점 $P(4,\sqrt{6})$를 지나는 기울기 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-4)+\sqrt{6}$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 기울기 m은 다음의 방정식을 만족한다.

$$\pm\sqrt{8m^2+2} = \sqrt{6}-4m$$

위 식을 제곱하여 이차방정식 $2m^2-2\sqrt{6}m+1=0$을 얻고, 이로부터 $m=\frac{\sqrt{6}\pm 2}{2}$을 구한다.

(2) 두 접선 ℓ_1, ℓ_2가 양의 x축과 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2라 하면, 두 접선이 이루는 각은 $\theta=\theta_2-\theta_1$을 만족한다. $\tan\theta_1=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$, $\tan\theta_2=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ 임을 이용하여 $\tan\theta$를 구하면

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)}{1+\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)}=\frac{4}{3}$$

이다. θ의 구간 $[0^\circ, 90^\circ)$에서 $y=\tan\theta$는 단조증가함수이며 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}>\frac{4}{3}$이므로, $\theta<60^\circ$ 이다.

(3) 이등분선 ℓ이 양의 x축과 이루는 각은 $\theta_1+\frac{\theta}{2}$이므로, 직선 ℓ의 기울기는 $\tan\left(\theta_1+\frac{\theta}{2}\right)$이다.

$\tan\frac{\theta}{2}=t$로 치환하면 $\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$이고, θ는 예각이므로 $t=\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$을 얻는다. 따라서

$$\tan\left(\theta_1+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)+\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 이고,}$$

직선 ℓ의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{6}}{3}(x-4)+\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

문제 1-B

(1) 기계는 신형과 구형 두 종류밖에 없으므로, 금을 제련할 때 구형기계를 사용하는 사건을 A라 하면, 신형기계를 사용하는 사건을 A^c라 할 수 있다. 원석가루 1 톤으로부터 생산된 금의 양이 0.2 kg이하인 사건은 B라 하자. 이때, 각각의 확률은 다음과 같이 계산될 수 있다.

- 구형기계로부터 0.2kg 이하의 금이 생산될 확률

$$P(B|A) = P(W \le 0.2|A) = P(0.5X \le 0.2) = P(X \le \frac{2}{5}) = \int_0^{2/5} 2-2x\,dx = \frac{16}{25}$$

- 신형기계로부터 0.2kg 이하의 금이 생산될 확률

$$P(B|A^c) = P(W \le 0.2|A^c) = P(0.6X \le 0.2) = P(X \le \frac{1}{3}) = \int_0^{1/3} 2-2x\,dx = \frac{5}{9}$$

(2) 임의의 기계를 이용해 원석가루 1 톤으로부터 0.2 kg 이하의 금을 생산하는 사건(B)이 일어났을 때, 그 기계가 구형이었을 사건(A)의 확률은 조건부 확률 $P(A|B)$이다. 제시문에 따르면,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

이므로, 확률 $P(A \cap B)$와 확률 $P(B)$를 구해야 한다.

사건 B는 사건 A 아니면 사건 A^c와 동시에 발생하고 그 외의 경우는 없다. 따라서 사건 B가 발생할 확률은 사건 B와 사건 A가 동시에 발생하는 확률과 사건 B와 사건 A^c가 동시에 발생하는 확률의 합이 된다. 따라서 다음의 등식을 얻는다.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

위 (1)에서 구한 조건부 확률들을 이용해 우변의 두 항을 구하면 다음과 같다.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{16}{25}$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B|A^c) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{9}$$

따라서 다음과 같이 조건부 확률 $P(A|B)$를 구할 수 있다.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{16}{25}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{16}{25} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{9}} = \frac{16}{16+125} = \frac{16}{141}$$

[출제근거]

문제 1-A	예문	수학 II: 삼각함수
	질문	이차곡선에 대한 접선의 방정식 두 각의 합에 대한 삼각함수 삼각함수의 증감
문제 1-B	예문	미적분과 통계기본: 통계 미적분과 통계기본: 확률
	질문	조건부 확률 정적분 계산 확률의 덧셈정리와 배반사건

자연계열 [문제 2] 출제의도 및 예시답안

[출제의도]

본 문제A는 빛과 광자의 관계 및 2진법의 과학적 기본개념을 이해하고, 이를 정보통신에 적용할 수 있는 논리적 사고와 통합적 문제 해결능력을 평가하는데 목적이 있다. 문제B는 화학 반응식과 그 양적 관계 그리고 기체의 압력과 부피, 온도 간의 상관관계를 과학적으로 이해할 수 있는지를 묻고 있다. 이를 통해 실생활의 자연현상을 해석할 수 있는 통합적 사고 능력을 평가하는데 이 문제의 목적이 있다.

[요소별 채점 기준표]

문항번호		세부평가항목
2-A	(1)	- 수평편광판을 통과하면 최종 빛의 세기는 $\cos^2\theta \times \sin^2\theta$ 배가 된다. - 최댓값을 갖기 위해서는 $2\theta = 90^o$, 즉 $\theta = 45^\circ$ 이다.
	(2)	- 수신자의 탐지기가 광자를 검출하려면 광자가 편광판을 통과해야 함. 송신비트가 0이라고 추정하였으므로 수직편광된 광자가 통과했다는 것을 의미함 - 수직편광된 광자를 통과시키려면, 설치된 편광판의 투과축 방향은 수직방향이어야 함. - 수평편광된 광자는 수직편광판을 통과할 수 없으므로, 검출 못한 경우는 송신비트는 1을 의미한다.
	(3)	- 설치된 편광판의 투과축의 방향이 수직축과 이루는 각도를 θ라 두면, 광자0이 통과할 확률은 $\cos^2\theta$ ---① 광자1이 통과할 확률은 $\cos^2(45^\circ - \theta)$ ---② - 수신자가 송신자의 비트를 정확히 해독하기 위해서는 한 종류의 광자가 통과할 확률이 1일 때, 다른 종류의 광자가 통과할 확률은 0이어야 한다. - ① 식의 $\cos^2\theta = 1$ 일 때, $\theta = 0^\circ$. 그러면, ②식은 값 $\frac{1}{2}$을 갖는다. 마찬가지로, ②식이 값 1을 가질 때, $\theta = 45^\circ$, ①식은 값 $\frac{1}{2}$을 갖는다. 그러므로 수신자는 어떠한 방향으로 편광판의 투과축을 설정해도 송신자의 신호를 정확하게 해독할 수 없다.
2-B	(1)	- 이소옥탄의 완전 연소 반응 $C_8H_{18} + \frac{25}{2}O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 9H_2O$ - 에탄올의 완전 연소 반응 $C_2H_5OH + 3O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 3H_2O$ - 1 kg의 이소옥탄과 에탄올로부터 발생하는 CO_2 질량비 $\dfrac{1\,\text{kg의 } C_8H_{18} \text{ 연소에서 발생하는 } CO_2 \text{ 질량}}{1\,\text{kg의 } C_2H_5OH \text{ 연소에서 발생하는 } CO_2 \text{ 질량}} = \dfrac{\frac{8\times 44}{114}}{\frac{2\times 44}{46}} = 1.614 = 1.6$
	(2)	- 주어진 문제의 조건으로부터, 반응 후 용기 속 기체의 전체 몰수 (n_f)는 반응 전 전체 몰수 (n_i)에 정량적 수식 관계를 가짐을 도출할 수 있다. $n_f = \frac{2}{5}n_i$ - 메탄의 불완전 연소 반응에서, 탄소 원소의 정량관계를 파악하고, 1 mol의 메탄이 연소할 때 발생하는 CO_2의 몰수를 x라고 가정하면, CO의 발생 몰수는 $(1-x)$임에 착안하여 메탄의 연소 반응식을 추론한다. $CH_4 + (\frac{1}{2}x + \frac{3}{2})O_2 \longrightarrow xCO_2 + (1-x)CO + 2H_2O$ - 위 두 관계식을 이용해, 용기 속에서 생성된 $CO_2(g)$와 $CO(g)$의 몰수 비 $\dfrac{n(CO_2)}{n(CO)} = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{3}{2} = 1.5$ 임을 도출

-가점요인: 글의 논리성, 정확한 근거의 논리적 제시, 서술 능력등를 종합적으로 판단하여 점수를 결정
-감점요인: 비문, 비논리적 전개, 기본 글쓰기 불량 (띄어쓰기, 맞춤법 불량 등), 부적절한 단위를 사용한 경우, 불완전한 수식의 표현

[예시답안]

문제 2-A

(1) 수직편광판을 통과한 빛의 세기를 A라고 할 때, θ로 기울어진 편광판을 통과하면 빛의 세기는 $A\cos^2\theta$이다. 다시 수평편광판을 통과하면 최종적으로 빛의 세기는 $A\cos^2\theta\times\sin^2\theta$ 가 된다. 위 값은 θ가 0도나 90도가 아니면 빛의 세기가 0이 되지 않으므로 일정량의 빛이 수평편광판을 통과하게 된다.

빛의 세기는 다음과 같이 $A\cos^2\theta\times\sin^2\theta = A(\sin\theta\cos\theta)^2 = A\left(\frac{1}{2}sin2\theta\right)^2$ 이 표현되므로, 최댓값을 갖기 위해서는 $2\theta = 90^\circ$ 즉 $\theta = 45^\circ$ 이다.

(2) 설치된 편광판의 투과축 방향 : 수직(↑) 방향
수신자의 탐지기가 광자를 검출하려면 광자가 편광판을 통과해야 한다. 이 경우 송신비트가 0이라고 추정하였으므로 수직편광된 광자가 통과했다는 것을 의미한다. 수직편광된 광자를 통과시키려면, 설치된 편광판의 투과축 방향은 수직방향이어야 한다. 수평편광된 광자는 수직편광판을 통과할 수 없으므로, 검출 못한 경우는 송신비트가 1이었다고 추정할 수 있다.

(3) 수직편광된 광자를 광자0, 45° 각도로 편광된 광자를 광자1이라고 하자. 그러면 광자0과 광자1이 θ로 기울어진 편광판을 통과할 확률은 다음과 같다.

광자0이 통과할 확률:

$$\cos^2\theta \quad \text{-- ①}$$

광자1이 통과할 확률:

$$\cos^2(45^\circ - \theta) = (\cos 45^\circ \cos\theta + \sin 45^\circ \sin\theta)^2 = \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\theta)^2 \quad \text{-- ②}$$

수신자가 송신자의 비트를 정확히 해독하기 위해서는 한 종류의 광자가 통과할 확률이 1일 때, 다른 종류의 광자가 통과할 확률은 0이어야 한다. 그러나,

- ① 식의 값이 1 이면 $\theta = 0^\circ$ 이므로 ② 식의 값은 $\frac{1}{2}$이 되고, 반대로
- ② 식의 값이 1 이면 $\theta = 45^\circ$ 이므로 ① 식의 값은 $\frac{1}{2}$이 된다.

따라서 수신자는 어떠한 방향으로 편광판의 투과축을 설정해도 송신자의 신호를 정확하게 해독할 수 없다.

문제 2-B

(1) 이소옥탄 및 에탄올의 완전 연소 반응은 각각 아래와 같이 표현된다.

$$C_8H_{18} + \frac{25}{2}O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 9H_2O \quad \text{--- ①}$$

$$C_2H_5OH + 3O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 3H_2O \quad \text{--- ②}$$

따라서, 1 mol 의 이소옥탄과 에탄올이 연소할 때 8 mol 및 2 mol의 CO_2가 각각 발생한다. 이 때 1 kg의 이소옥탄과 에탄올의 몰수가 각각 $\frac{1\,\text{kg}}{114\,\text{g/mol}}$ 및 $\frac{1\,\text{kg}}{46\,\text{g/mol}}$ 이다.

따라서 $\dfrac{1\,\text{kg의 } C_8H_{18} \text{ 연소에서 발생하는 } CO_2 \text{ 질량}}{1\,\text{kg의 } C_2H_5OH \text{ 연소에서 발생하는 } CO_2 \text{ 질량}} = \dfrac{\dfrac{8\times44}{114}}{\dfrac{2\times44}{46}} = 1.614 = 1.6$

(2) 반응 전 기체의 온도와 전체 압력을 각각 T_i, P_i라고 하면, 이상 기체 상태 방정식에 의해

$$P_i V = n_i R T_i \qquad \text{-- ①}$$

반응이 진행된 후, 용기 속 기체의 온도 및 전체 압력을 각각 T_f, P_f라고 하면,

$$P_f V = n_f R T_f = n_f R(\frac{5}{2}T_i) \qquad \text{-- ②}$$

반응 전후 기체의 전체 압력은 동일하므로,

$$P_i = P_f \qquad \text{--- ③}$$

따라서 위 수식 ①과 ②에 의해

$$n_f = \frac{2}{5}n_i \qquad \text{--- ④}$$

한편 1 mol의 메탄이 연소할 때 발생하는 CO_2의 몰수를 x라고 가정하면, CO의 발생 몰수는 (1-x)이다.

따라서 메탄의 연소 반응식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$CH_4 + (\frac{1}{2}x + \frac{3}{2})O_2 \longrightarrow xCO_2 + (1-x)CO + 2H_2O \qquad \text{--- ⑤}$$

위 반응식 (4)에서 $n_i = 3c$ 라면 (CH_4 몰수를 c로 가정),

$$n_f = \frac{(1-x)c}{2} + c = \frac{(3-x)c}{2}$$

$n_f = \frac{2}{5}n_i$ 이므로 $\frac{(3-x)c}{2} = \frac{2}{5}(3c)$

$$x = \frac{3}{5}$$

따라서 $\dfrac{n(CO_2)}{n(CO)} = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

[출제근거]

문제 2-A	예문	물리 I 「물질과 전자기장」 : 편광 물리 I 「정보와 통신」 : 광양자설 과학 「정보의 발생과 처리」 : 2진법신호, 비트
	질문	수직편광, 수평편광 구별 빛과 광자의 관계 비트0, 1과 편광방향의 관계
문제 2-B	예문	화학 I 「화학의 언어」 : 화학식과 원소분석 화학 I 「아름다운 분자 세계」 : 분자의 구조 화학 II 「다양한 모습의 물질」 : 기체
	질문	화학반응식 화학 반응식과 그 양적 관계 연소 반응