◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거(출제문제 해설 포함) ◆

자연계열 [문제 1] 출제의도 및 예시답안

[출제의도]

본 문제는 일차변환과 행렬, 기하 및 벡터, 연속확률변수, 미분 및 적분 등의 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 고정점의 성질, 최적화 등 다양한 분야에 적용할 수 있는 논리적 사고 능력과 통합적 문제 해결 능력을 평가하는 데 목적이 있다.

[요소별 배점 기준표]

문항 번호		세부 평가항목
문제 1-A	(1)	- 고정점은 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ 위의 모든 점 - 원점에서 가장 가까운 고정점 (a,b)는 $\frac{b}{a}\times\frac{2}{3}=-1$ 만족 - $(a,b)=\left(-\frac{2}{13},\frac{3}{13}\right)$
	(2)	- $h(Z)=h(sG_1+tG_2)=sAG_1+tAG_2+P$ - $AG_1=G_1-P,\ \ AG_2=G_2-P$를 이용하여 $h(Z)=Z+(1-s-t)P$ 증명 - 직선 l 위의 모든 점 Z는 $s+t=1$을 만족하므로, $h(Z)=Z$
문제 1-B	(1)	- 다른 항공사에 운송을 위탁해야 할 확률 : $P(X<u)$ - $P(X<u)=\int_0^u \cos x\,dx=[\sin x]_0^u=\sin u$ - $\sin u=\frac{1}{2}\ \ (0\le u\le\frac{\pi}{2})\ \Rightarrow\ u=\frac{\pi}{6}$
	(2)	- $Q(u)=\int_0^u (u-x)f(x)\,dx$ - $\int_0^u (u-x)\cos x\,dx=1-\cos u$ ※$Q(u)$의 식이 틀린 경우 : $\int x\cos x\,dx$ 부분적분 맞으면 일부인정
	(3)	- $R'(u)=1000-2000\sin u$ - $R'(u)=0\ \Rightarrow\ u=\frac{\pi}{6}$ - $R(u)$는 구간 $[0,\frac{\pi}{6}]$에서 증가, 구간 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$에서 감소하므로, $u=\frac{\pi}{6}$일 때 $R(u)$가 최댓값을 가짐 ※ (2)번에서 틀린 경우 : 1000u - 2000$Q(u)$에 대한 미분이 올바르면 일부인정

- 가점 요인: 글의 논리성, 정확한 근거의 논리적 제시, 서술 능력 등을 종합적으로 판단하여 점수를 결정
- 감점 요인: 비문, 비논리적 전개, 기본 글쓰기 불량(띄어쓰기, 맞춤법 불량 등), 부적절한 단위를 사용한 경우, 불완전한 수식의 표현 등

[예시답안]

문제 1-A

(1) 식 $h(X)=AX+P=X$에서

$$\begin{cases} 3x-3y+1=x \\ 4x-5y+2=y \end{cases}$$

을 얻는다. 위 식을 정리하면 $2x-3y+1=0$이 되므로 직선 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$위의 모든 점들이 변환 h의 고정점이 된다.

직선 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$위의 점 중 원점에서 가장 가까운 점을 (a,b)라 두면, 원점과 점 (a,b)를 지나는 직선 $y=\dfrac{b}{a}x$와 직선 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$은 서로 수직이다. 따라서 두 식

$$b=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3},\ \frac{b}{a}\times\frac{2}{3}=-1$$

을 연립하여 풀면 $(a,b)=\left(-\dfrac{2}{13},\dfrac{3}{13}\right)$가 원점에서 가장 가까운 고정점이 된다.

(2) $Z=sG_1+tG_2$라 하면

$$\begin{aligned} h(Z)=h(sG_1+tG_2) &= A(sG_1+tG_2)+P \\ &= sAG_1+tAG_2+P \end{aligned}$$

을 얻는다. 점 G_1과 G_2가 고정점이므로

$$AG_1=G_1-P,\ \ AG_2=G_2-P$$

이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} h(Z) &= s(G_1-P)+t(G_2-P)+P \\ &= sG_1+tG_2+(1-s-t)P \\ &= Z+(1-s-t)P \end{aligned}$$

이다.

특히, 점 G_1과 G_2를 지나는 직선 위의 점은 $Z=(1-t)G_1+tG_2$ (t는 실수)로 표현되므로, 직선 l 위의 모든 점 Z에 대하여 $h(Z)=Z$이 성립한다. 따라서 직선 l 위의 모든 점이 변환 h의 고정점이 된다.

문제 1-B

(1) 다른 항공사에 운송을 위탁해야 할 확률은 취소되는 물량이 초과예약물량보다 적을 확률과 같다.

$$P(X < u) = \int_0^u \cos x \, dx = [\sin x]_0^u = \sin u$$

즉, 다른 항공사에 운송을 위탁할 확률은 $\sin u$이다. 따라서, $\sin u = \frac{1}{2}$ $(0 \le u \le \frac{\pi}{2})$를 만족하는 초과예약물량은 $u = \frac{\pi}{6}$이다.

(2) 취소물량 X가 초과예약물량 u보다 적은 경우 $(u - X)$만큼을 다른 항공사에 운송을 위탁하고, X가 u보다 크거나 같은 경우 위탁할 물량이 없다. 즉, 다른 항공사에 위탁할 물량의 기댓값 $Q(u)$는 다음과 같다.

$$Q(u) = \int_0^u (u-x) f(x)\, dx = u \int_0^u f(x)\, dx - \int_0^u x f(x)\, dx$$

$$= u \sin u - \int_0^u x \cos x \, dx$$

부분적분법을 이용하면

$$\int_0^u x \cos x \, dx = \Big[x \sin x \Big]_0^u - \int_0^u \sin x \, dx$$

$$= u \sin u + \cos u - 1$$

이다. 따라서 다른 항공사에 위탁하는 물량의 기댓값은

$$Q(u) = u \sin u - u \sin u + 1 - \cos u = 1 - \cos u$$

이다.

(3) u톤을 초과예약으로 받았을 때 항공사가 얻는 기대순이익 $R(u)$는 다음과 같다.

$$R(u) = 1000u - 2000 \cdot (1 - \cos u)$$

$R(u)$의 도함수는

$$R'(u) = 1000 - 2000 \sin u$$

이고, $R'(u_0) = 0$을 만족하는 u_0를 구하면

$$R'(u_0) = 1000 - 2000 \sin u_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{\pi}{6}$$

이다. $u = u_0$를 기준으로 $R(u)$의 증감을 보면 다음과 같다.

	$0 \le u < u_0$	$u = u_0$	$u_0 < u \le \frac{\pi}{2}$
$R'(u)$	+	0	—
$R(u)$	↗	극대	↘

따라서, $R(u)$를 최대화하는 초과예약물량은 $\frac{\pi}{6}$ 톤이다.

[출제근거]

문제 1-A	예문	수학「도형의 방정식」: 평행이동 수학「함수」:합성변화(함수의 합성) 기하와 벡터「일차변환과 행렬」: 일차변환
	질문	연립방정식과 행렬의 관계 점과 직선 사이의 관계 행렬의 연산
문제 1-B	예문	미적분학과 통계기본「통계」: 연속확률변수와 확률밀도함수, 기댓값
	질문	연속확률변수의 성질 삼각함수의 적분법 부분적분법 함수의 미분과 최대, 최소

자연계열 [문제 2] 출제의도 및 예시답안

[출제의도]

과학 교과서 내용의 이해도 및 주어진 조건에 맞는 결과를 찾아낼 수 있는 과학적 사고 능력을 평가하는 문제이다. 과학 교과서에서 발췌한 제시문을 참고하여 인공위성의 운동, 상대성 이론에 의한 시간 팽창, 화학 반응식, 화학 평형에 대해 이해하고, 논리적인 추론을 통하여 정량적인 결과를 도출하고 이를 해석할 수 있는 능력을 평가한다.

[요소별 배점 기준표]

문항 번호		세부 평가항목
문제 2-A	(1)	- 피타고라스 정리를 이용하여, $(r+h)^2=(vt)^2+r^2$ - $h \ll r$을 이용하여, $h=\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2$ - 등가속도 법칙과 비교하여, $a=\frac{v^2}{r}$
	(2)	- (중력 = 구심력)을 이해하여, $\frac{mv^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}$ - 원운동의 기본개념을 통해, 공전주기 10시간
	(3)	- 상대성 이론에 의한 시간 차이 관계식을 제시 : $\Delta t=\Delta t_{특수}+\Delta t_{일반}=\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{GM}{c^2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1})$ (불완전한 식인 경우, 부분 감점) - 정확한 계산을 통해, 1시간당 시간 차이는 약 $-2\,\mu\mathrm{s}$
문제 2-B	(1)	- 화학 반응식을 이용하여 반응 후 기체들의 몰수를 구한다. 계산과정 중 $\mathrm{N_2}$는 2.7몰, $\mathrm{H_2}$는 0.1몰의 표현이 있으면 인정. (또는 $\Delta\mathrm{N_2}=-0.3$몰, $\Delta\mathrm{H_2}=-0.9$몰) - 몰수 비는 압력 비임을 이용하여 압력 비=0.85를 구한다. - 반응 지수와 평형 상수를 비교하여 역반응을 예측한다. (르샤틀리에 법칙을 이용하여 설명하여도 인정)
	(2)	- 제시문의 내용과 문제의 조건에서 평형에서의 농도 관계를 이용하여 $[\mathrm{C}](=x)$에 대한 관계식을 제시한다. - 함수의 최댓값 개념을 이용하여 모든 K에 대해 $\frac{[\mathrm{A}]_0}{[\mathrm{B}]_0}=1$임을 논리적으로 기술한다. ※부분 배점: $K=\infty$(반응의 완결, 비가역 반응, 한계 반응물 개념의 이용)인 경우를 들어 $\frac{[\mathrm{A}]_0}{[\mathrm{B}]_0}=1$를 기술하는 경우는 부분 배점

- 가점 요인: 글의 논리성, 정확한 근거의 논리적 제시, 서술 능력 등을 종합적으로 판단하여 점수를 결정
- 감점 요인: 비문, 비논리적 전개, 기본 글쓰기 불량(띄어쓰기, 맞춤법 불량 등), 부적절한 단위를 사용한 경우, 불완전한 수식의 표현 등

[예시답안]

문제 2-A

(1) **<그림 1>**을 참고하여 피타고라스 법칙을 이용하면 다음의 식을 얻는다.

$$(r+h)^2 = (vt)^2 + r^2$$

이를 전개하면, $h(2r+h) = v^2t^2$.

$r \gg h$이므로, $2rh = v^2t^2$으로 근사된다. 따라서, $h = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2$이다.

초기 속도가 0인 등가속도 운동에서 거리(s)−시간(t)의 관계식인 $s = \frac{1}{2}at^2$ (a: 등가속도)과 비교하면, 등가속도는 $a = \frac{v^2}{r}$이 된다.

(2) 인공위성의 원운동에서 인공위성이 받는 중력이 구심력이다.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

위 식으로부터 $v^2 = \frac{GM}{r}$이 된다.

제시문과 논제에서 정보를 이용하면, (단위는 km, s를 사용)

$$v^2 = \frac{4\times 10^5}{25000} = 4^2, \quad v = 4\ \mathrm{km/s}$$

공전 주기(h)를 계산하면,

공전 주기(h) = $(\frac{2\pi r}{v})\times(\frac{1}{3600}) = \frac{2\times 3\times 25000}{4\times 3600} \sim 10$ (h)이다.

(3) 제시문을 참고하면, 1초당 시간 차이는 특수 상대성 이론과 일반 상대성 이론에 의해 계산할 수 있다.

$$\Delta t = \Delta t_{특수} + \Delta t_{일반} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{GM}{c^2}(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) = \frac{1}{c^2}[\frac{v^2}{2} + GM(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})]$$

제시문과 논제에서 제공한 정보를 이용하면,

(지표면: $r_1 = 5{,}000\ \mathrm{km}$, GPS 위성 속력: $v = 4\ \mathrm{km/s}$, $r_2 = 25{,}000\ \mathrm{km}$)

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{(3\times 10^5)^2}\times[\frac{4^2}{2} + (4\times 10^5)\times(\frac{1}{25000} - \frac{1}{5000})] \\ &= \frac{1}{(3\times 10^5)^2}\times[\frac{4^2}{2} - (4\times 10^5)\times\frac{4}{25000}] \\ &= 89\ \mathrm{ps} - 711\ \mathrm{ps} = -622\ \mathrm{ps}\ (1\ \mathrm{ps} = 1\times 10^{-12}\,\mathrm{s})\end{aligned}$$

한 시간 동안의 시간 차이 $\Delta t\times 3600$은 약 $-2\ \mu\mathrm{s}$(약 2 μs의 시간 빠름)이다.

문제 2-B

(1) 반응 전과 반응 후 기체 분자의 총 몰수를 구하고 아보가드로의 법칙을 이용하여 기체의 반응 전과 반응 후의 총 압력을 구한다.

생성된 NH_3의 몰수 = $2\times$반응한 N_2의 몰수 = $\frac{2}{3}\times$반응한 H_2의 몰수

	$N_2(g)$	+	$3H_2(g)$	$\rightleftarrows$	$2NH_3(g)$	기체의 총 몰수
반응 전 몰수	3.0		1.0		0	4.0
반응 후 몰수	3.0 - 0.30		1.0 - 0.90		0.6	3.4

기체의 총 압력은 기체 분자의 총 몰수에 비례하므로

$$\frac{P_e}{P_0} \propto \frac{n_e(\mathrm{total})}{n_0(\mathrm{total})} = \frac{3.4}{4.0} = \frac{17}{20} = 0.85$$

평형에서 N_2, H_2, NH_3의 농도를 $[N_2]_e$, $[H_2]_e$, $[NH_3]_e$ 라고 하면 평형 상수 $K = \frac{[NH_3]_e^2}{[N_2]_e^1[H_2]_e^3}$ 이다.

일정한 온도에서 부피를 2배로 하면 기체들의 농도가 각각 $\frac{1}{2}$이 되므로 이때의 반응 지수

$$Q = \frac{\left(\frac{[NH_3]_e}{2}\right)^2}{\left(\frac{[N_2]_e}{2}\right)^1\left(\frac{[H_2]_e}{2}\right)^3} = 4\frac{[NH_3]_e^2}{[N_2]_e^1[H_2]_e^3} = 4K > K$$

이다. 따라서 역반응이 우세하게 진행된다. 즉, 반응물 N_2, H_2가 증가하는 방향으로 반응이 진행된다.

(2) 주어진 반응식에서 반응하여 생성되는 C의 몰수를 x로 놓고 평형에서 A, B, C의 농도를 이용하여 평형 상수 K를 x에 대한 식으로 나타내어 x를 구한다.

처음 상태 $[\mathrm{A}]_0$와 $[\mathrm{B}]_0$에서 x만큼 반응하여 평형에 도달하였다면, 평형 상태에서

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}]_0 - x, \quad [\mathrm{B}] = [\mathrm{B}]_0 - x, \quad [\mathrm{C}] = x$$

이므로 평형에서 $K = \frac{x}{([\mathrm{A}]_0 - x)([\mathrm{B}]_0 - x)}$ 이다.

$[\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 = 1$ 이므로 x에 대해 정리하면 $x^2 - (\frac{1}{K}+1)x + [\mathrm{A}]_0(1-[\mathrm{A}]_0) = 0$ 이다.

근의 공식을 사용하면

$$x = \frac{\left(\frac{1}{K}+1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{K}+1\right)^2 - 4[\mathrm{A}]_0(1-[\mathrm{A}]_0)}}{2}$$

이다. x가 가질 수 있는 최댓값은 $K=\infty$(비가역 반응)인 조건에서, A와 B중 적은 쪽(한계 반응물)이 모두 반응하여 C가 생성될 때이고 그 때 C의 양은 한계 반응물의 양과 같다. 이 조건에서 $[\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 = 1.0$이므로 $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0$일 때 $x = \frac{1}{2}$의 최댓값을 갖는다.

$0 \le x \le \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{\left(\frac{1}{K}+1\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{K}+1\right)^2 - 4[\mathrm{A}]_0(1-[\mathrm{A}]_0)}}{2}$ 만 해가 된다.

모든 K에 대해 x가 최대가 되는 $[\mathrm{A}]_0$를 구하기 위해 $[\mathrm{A}]_0$로 x를 미분하면($0 \le [\mathrm{A}]_0 \le 1$)

$$\frac{dx}{d[\mathrm{A}]_0} = \frac{4-8[\mathrm{A}]_0}{4\sqrt{\left(\frac{1}{K}+1\right)^2 - 4[\mathrm{A}]_0(1-[\mathrm{A}]_0)}} = 0$$

이다. 따라서, $\frac{dx}{d[\mathrm{A}]_0}$는 $[\mathrm{A}]_0 = \frac{1}{2}$을 기준으로 양에서 음으로 변하므로, $\frac{[\mathrm{A}]_0}{[\mathrm{B}]_0} = 1$일 때, 모든 K에 대해 x가 최대가 된다.

[출제근거]

문제 2-A	예문	물리 I 「시공간과 우주」: 중력, GPS, 상대성 이론 (상대성 이론의 경우, 교과서 내용의 이해를 돕기 위해 식을 추가적으로 제공하였음.)
	질문	원운동과 구심력 중력에 의한 원운동 상대성 이론에 의한 시간 팽창 효과
문제 2-B	예문	화학 I 「화학의 언어」: 화학식량과 몰 및 화학반응식 화학 II 「화학 평형」: 화학 평형 및 반응의 방향
	질문	몰과 기체의 압력과의 관계 화학 반응 지수를 이용한 반응의 방향 평형 반응식을 이용한 평형 상태와 반응 초기 조건과의 관계