2015학년도 숭실대학교 수시 신입학

논술고사 문제지(1교시:자연계열)

지원학과(부)		수험번호		성 명	

※ 주의사항(문제 1-2번 공통)

① 답안 작성시 반드시 답란과 해당문제가 일치해야 함. (이를 어길 경우 '0'점 처리함.)

② 답안지에 자신을 드러내는 표현을 쓰지 말 것.

③ **검정색 필기구(연필, 볼펜, 사인펜 등)**만을 사용하여 답안을 작성할 것. (그 외의 색 필기구 사용은 부정행위에 해당함.)

【문제 1】

문제 1-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. **(20점)**

(가) 좌표평면 위의 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$가

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

의 꼴로 나타날 때, 이러한 변환 f를 **일차변환**이라고 한다.

좌표평면 위의 변환 $g:(x',y')\to(x'',y'')$가

$$\begin{cases} x'' = x' + p \\ y'' = y' + q \end{cases}$$

의 꼴로 나타날 때, 이러한 변환 g를 **평행이동**이라고 한다.

[출처 : 수학 「도형의 방정식」, 기하와 벡터 「일차변환과 행렬」]

(나) 일차변환 f와 평행이동 g의 **합성변환** $h = g \circ f : (x,y)\to(x'',y'')$는

$$\begin{cases} x'' = x' + p = ax + by + p \\ y'' = y' + q = cx + dy + q \end{cases}$$

와 같이 나타나고, 이 합성변환 h를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

여기서 $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$로 두면 변환 h는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X'' = h(X) = AX + P$$

[출처 : 수학 「함수」, 기하와 벡터 「일차변환과 행렬」]

위 제시문에서 주어진 변환 $h(X) = AX + P$에 의하여 점 G가 동일한 점 G로 옮겨질 때, 즉 $h(G) = G$가 될 때, 이 점 G를 변환 h의 **고정점**이라 한다. 다음 문항에 답하시오.

(1) 변환 h에서

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

일 때, 변환 h의 고정점 중 원점에 가장 가까운 고정점을 구하시오.

(2) 임의의 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

가 나타내는 변환 h에 대하여, 서로 다른 두 점 G_1, G_2가 변환 h의 고정점이라 하자. 점 $Z = sG_1 + tG_2$ (s, t는 실수)에 대해

$$h(Z) = Z + (1 - s - t)P$$

가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 점 G_1과 G_2를 지나는 직선 l 위의 모든 점이 변환 h의 고정점이 됨을 보이시오.

<뒷면에 계속>

문제 1-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

(가) 어떤 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 실숫값을 가지는 변수 X에 대하여 구간 $[\alpha, \beta]$를 정의역으로 하는 어떤 함수 $f(x)$가 조건

$$(i) \quad f(x) \ge 0 \qquad (\alpha \le x \le \beta)$$

$$(ii) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 1$$

$$(iii) \quad P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (\alpha \le a \le b \le \beta)$$

을 만족할 때, X를 **연속확률변수**라 하고, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

[출처 : 미적분학과 통계 기본 「통계」]

(나) 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 실숫값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때,

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx$$

를 확률변수 X의 **기댓값**이라고 한다.

[출처 : 미적분학과 통계 기본 「통계」]

항공화물 운송업에서는 **초과예약** 제도를 시행하고 있다. 초과예약이란 화물기의 적재용량보다 더 많은 물량에 대해 운송계약을 체결하는 것을 말한다. 적재용량 만큼만 예약을 받으면 고객이 예약을 취소할 경우 적재용량을 다 채우지 못한 채로 화물기를 운행하게 된다. 하지만, 초과예약을 받으면 일부 고객이 예약을 취소하더라도 적재용량을 최대한 채워서 운행할 수 있다. 단, 취소물량이 초과예약된 물량보다 적어 운송해야 할 물량이 적재용량을 초과하는 경우에 대비해야 한다.

항공사 A는 취소되는 물량을 예상하여 적재용량 20톤인 화물기에 대해 총 $(20+u)$톤의 예약을 받는다. 여기서 u는 **초과예약물량**으로 $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$이다. 예약이 취소되는 물량을 연속확률변수 X라 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (0 \le x \le \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} < x \le 20+u) \end{cases}$$

이 항공사는 화물 1톤당 1,000만 원을 받고 고객과 운송계약을 체결한다. 취소물량 X가 초과예약물량 u보다 적은 경우, 적재용량을 초과하는 물량에 대해 1톤당 2,000만 원의 비용을 지불하고 다른 항공사에 운송을 위탁한다.

다음 문항에 답하시오.

(1) 다른 항공사에 운송을 위탁하게 될 확률이 $\frac{1}{2}$이 되는 초과예약물량 u를 구하시오.

(2) 다른 항공사에 위탁하게 될 물량의 기댓값을 초과예약물량 u에 대한 함수 $Q(u)$로 나타내시오.

(3) 고객이 예약을 취소하더라도 계약 금액을 환불하지 않는다고 할 때, 초과예약물량 u로부터 발생하는 항공사의 기대이득과 기대비용은 다음과 같다.

기대이득 : 1,000만 원 $\times$ [초과예약물량 u]
기대비용 : 2,000만 원 $\times$ [다른 항공사에 위탁하게 될 물량의 기댓값 $Q(u)$]

이때 초과예약물량 u로부터 발생하는 항공사의 기대순이익

$$R(u) = \text{기대이득} - \text{기대비용}$$

을 최대화하는 u의 값을 결정하시오.

<다음면에 계속>

【문제 2】

문제 2-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

(가) 질량을 가진 두 물체 사이에는 서로를 잡아당기는 힘이 작용하는데 이 힘을 중력이라고 한다. 질량이 M인 물체와 질량이 m인 물체가 거리 r만큼 떨어져 있을 때 두 물체 사이에 작용하는 중력 F는 $F=G\frac{Mm}{r^2}$(G는 중력 상수)이다. 이와 같은 중력 법칙이 태양과 행성, 또는 지구와 인공위성 사이에 적용된다.

[출처 : 물리 I「시공간과 우주」]

(나) GPS(Global Positioning System)는 인공위성을 사용하여 세계 어느 곳에서든지 자신의 위치를 정확하게 알 수 있는 시스템이다. GPS에 사용되는 위성은 지상과 통신하여 자신의 위치 정보를 제공받으며, 또 자신의 위치, 시간 정보를 GPS 수신기에 지속적으로 송신한다. GPS 위성과 수신기 사이의 거리는 위성에서 수신기까지 전파가 이동하는 시간을 측정하여 계산(거리 = 속도 × 시간)한다. 그러므로 인공위성에서 수신기까지 전파가 이동하는 시간을 정밀하게 측정하여야 거리 계산이 정확해진다. 실제로 1 μs(1×10^{-6} s)의 시간 측정 오차에도 300 m 이상의 거리 측정 오차가 발생한다.

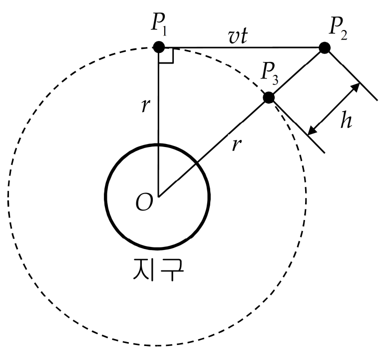
[출처 : 물리 I「시공간과 우주」]

(다) 특수 상대성 이론에 의하면 정지한 관찰자에게는 아주 빠르게 움직이는 사람의 시간이 느리게 가는 것으로 관찰되며, 이를 시간 팽창 현상이라고 한다. 예를 들어 아주 빠른 속도 v로 움직이는 사람이 t_0마다 신호를 보내면, 정지한 관찰자에게는 그 신호 주기가 t로 관찰되는데, 그 관계식은 $t=\frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$이다. ($c$는 진공일 때 빛의 속도) 이 경우 1초당 시간 차이는 $\Delta t=\frac{t-t_0}{t_0}\fallingdotseq\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$초로 근사적으로 표현된다.

일반 상대성 이론에 의하면 시간은 또한 중력의 영향을 받는데 중력이 클수록 시간이 느려지게 된다. 지구의 중력에 의한 시간 팽창 효과의 관계식은 $t=\frac{t_\infty}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}$이다. ($t_\infty$: 지구의 중력이 미치지 않는 무한히 멀리 떨어진 지점에서의 시간 간격, r : 지구 중심으로부터의 거리, M : 지구의 질량) 따라서 인공위성에서보다 중력이 상대적으로 큰 지표면의 관찰자에게는 인공위성의 시간은 빠르게 가는 것으로 관찰된다. 지구 중심으로부터의 거리가 r_1인 곳(지표면)에서 r_2인 곳(인공위성)의 시간을 측정할 때, 1초당 시간 차이는 $\Delta t=\frac{t_2-t_1}{t_1}\fallingdotseq\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$초로 근사적으로 표현된다. ($t_1$: 지표면에서의 시간 간격, t_2 : 지표면에서 관찰되는 인공위성에서의 시간 간격)

[출처 : 물리 I「시공간과 우주」]

(1) <그림 1>은 지구를 돌고 있는 인공위성의 원운동(속력 v, 궤도 반지름 r)을 보여준다. 중력이 없다면 위성은 P_1에서 P_2로 시간 t동안 등속 운동을 할 것이다. 하지만, 중력에 의해 P_3로 떨어져 원운동을 하게 되는데, 이러한 과정은 P_2에서 P_3로 거리 h만큼 등가속도 자유 낙하를 하는 것으로 이해할 수 있다. (r에 비해 h는 매우 작다.) 이를 표현하는 h와 t 사이의 관계식을 유도하고, 이 관계식으로부터 자유 낙하 운동의 가속도는 원운동의 구심 가속도의 크기인 $\frac{v^2}{r}$이 됨을 설명하시오. (단, P_2에서 지구 중심 방향으로의 속력은 0 이다.)



<그림 1>

(2) 위성이 지상으로부터 20,000 km의 높이에서 지구를 돌고 있다. 이 위성의 공전 주기가 약 10시간임을 보이시오. (단, 계산의 편의를 위해 지구 반지름은 5,000 km, 중력 상수 G와 지구의 질량 M의 곱은 $GM=4\times10^5\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\pi=3$으로 한다.)

(3) GPS 위성은 높은 곳에서 빠르게 움직이고 있으므로 지상에서 관측되는 위성의 시간은 지상의 시간과는 차이를 보인다. 실제 GPS에서는 시각에 대한 정보를 지구로 송신할 때 특수 상대성 이론과 일반 상대성 이론에 의한 시간 차이를 고려하여 수정한 값을 보내고 있다. 지상으로부터 높이 20,000 km에서 지구를 돌고 있는 GPS 위성의 시계를 1시간 동안 수정하지 않을 경우 발생하는 지상과의 시간 차이는 몇 μs인지 어림하시오. (단, 상대성 이론의 효과 외에는 시간에 영향을 주는 요소는 없다고 가정하고, 지구 반지름은 5,000 km, $GM=4\times10^5\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $c=3\times10^5$ km/s로 한다.)

<뒷면에 계속>

문제 2-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

(가) 화학에서는 원자 수나 분자 수를 나타내기 위하여 몰(mole)이라는 묶음 단위를 사용하고, 그 단위로 몰(mol)을 쓴다. 아보가드로의 법칙에 따라 기체의 조성과 관계없이 일정한 온도와 압력에서 기체가 차지하는 부피는 기체 분자의 총 몰수에 비례한다. 기체의 압력은 기체 분자가 용기 벽에 충돌하면서 나타나므로 기체 분자 수가 많아지면 압력도 증가한다. 즉, 같은 온도에서 부피가 일정할 때 기체의 압력은 몰수에 비례한다.

화학식을 이용하여 화학적 변화를 나타낸 것을 화학 반응식이라 한다. 화학 반응이 일어나는 동안 원자는 변하지 않으므로 반응물과 생성물의 원자 종류와 개수는 같아야 한다. 화학 반응식에서 반응 계수는 화합물의 개수를 나타내고, 화합물의 개수는 화학 양론에서 물질의 몰수를 나타내므로 화학 반응식에서의 계수 비는 반응에 참여하는 각 화합물의 몰수 비와 같다. 화학 반응식을 이용하면 반응물의 양만으로도 생성물이 얼마나 생길지 예상할 수 있고, 생성물의 양으로 얼마만큼의 물질이 반응에 쓰였는지 알 수 있다. 이 때 물질의 양은 몰이나 부피, 질량, 입자 수 등 어떤 것으로도 나타낼 수 있다.

[출처 : 화학 I 「화학의 언어」]

(나) 화학 반응에서 반응물이 생성물로 되는 반응을 정반응이라 하고, 생성물이 반응물로 되는 반응을 역반응이라 한다. 대부분의 화학 반응은 반응 조건(반응물과 생성물의 초기 농도, 압력, 부피, 온도 등)에 따라 정반응과 역반응이 모두 일어날 수 있는데 이를 가역 반응이라 한다. 가역 반응에서 반응물은 생성물로 모두 변할 때까지 반응이 진행되지 않고 반응물과 생성물의 농도가 일정하게 유지되는 상태에 도달하게 되는데, 이러한 상태를 화학 평형이라 한다. 가역 반응에서 반응의 방향은 반응 지수로 예측할 수 있다. 일정한 온도에서 임의의 상태의 반응물의 농도와 생성물의 농도와의 관계를 나타내는 것을 반응 지수(Q)라 하고 임의의 화합물 A, B, C, D의 일반적인 반응에 대해 다음과 같이 나타낸다.

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \rightleftarrows c\mathrm{C} + d\mathrm{D} \qquad Q = \frac{[\mathrm{C}]^c[\mathrm{D}]^d}{[\mathrm{A}]^a[\mathrm{B}]^b} \qquad (a,\ b,\ c,\ d : \text{반응 계수},\ [\ ] : \text{몰}/\mathrm{L})$$

평형에서의 반응 지수를 평형 상수(K)라 하고 임의의 상태에서 반응의 방향은 Q에 따라 다음과 같다.

$Q < K$: 정반응 우세
$Q = K$: 평형 상태
$Q > K$: 역반응 우세

[출처 : 화학 II 「화학 평형」]

(1) 20세기 초 하버는 수소(H_2) 기체와 질소(N_2) 기체를 이용하여 질소 비료의 원료가 되는 암모니아(NH_3)를 대량으로 합성하는 새로운 공정을 고안하여 산업 혁명 이후 인구 증가에 의한 식량 문제를 해결하는 데 크게 기여하였다. 암모니아 기체의 합성 반응식은 다음과 같다.

$$\mathrm{N_2}(g) + 3\mathrm{H_2}(g) \rightleftarrows 2\mathrm{NH_3}(g)$$

일정한 온도에서 1.0 L의 반응 용기에 N_2 기체 3.0몰과 H_2 기체 1.0몰을 넣고 반응시켰더니, 평형에 도달하여 0.60몰의 NH_3 기체가 생성되었다. 반응 전 기체의 총 압력(P_0)과 평형에서의 기체의 총 압력(P_e)의 비($\frac{P_e}{P_0}$)를 구하시오. 그리고 평형을 이루고 있는 기체의 반응 용기의 부피를 일정한 온도에서 2배로 증가시킬 때 반응의 방향을 예측하시오.

(2) 다음은 수용액에서 임의의 화합물 A, B, C의 화학 반응식과 평형 상수이다.

$$\mathrm{A}(aq) + \mathrm{B}(aq) \rightleftarrows \mathrm{C}(aq) \qquad K = \frac{[\mathrm{C}]}{[\mathrm{A}][\mathrm{B}]}$$

위의 반응에서 A와 B의 초기 농도 $[\mathrm{A}]_0$와 $[\mathrm{B}]_0$에 대해 $[\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 = 1.0\text{몰}/\mathrm{L}$인 조건에서 $[\mathrm{A}]_0$와 $[\mathrm{B}]_0$의 비율을 변화시키며 반응시켰다. 이 때, 모든 K에 대해서 평형 상태에서의 C의 농도가 최대가 되는 조건은 $\frac{[\mathrm{A}]_0}{[\mathrm{B}]_0} = 1$임을 보이시오. (단, 반응 중 부피와 온도의 변화는 없고, C의 초기 농도 $[\mathrm{C}]_0 = 0$ 이다.)

<끝>