자연계 [문제 1] 평가항목

[출제의도]

본 문제는 미분, 기하 및 벡터 등의 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 최적화, 물체의 운동 등 다양한 분야에 적용할 수 있는 논리적 사고 능력과 통합적 문제 해결 능력을 평가하는데 목적이 있다.

[요소별 평가항목]

문항 번호		세부 평가항목
문제 1-A	(1)	- $S(m)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{m}\right)\left(b-am\right)$ - $S'(m)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b+am)(b-am)}{m^2}$ - $F(a,b)=2ab$
	(2)	- $G(a)=\frac{4}{3}a\sqrt{9-a^2}\ \ (0<a<3)$ - $G'(a)=\frac{4}{3\sqrt{9-a^2}}(9-2a^2)$ - 점 $P\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$에서 최댓값 6
문제 1-B	(1)	- 시각 t에서의 점 A의 위치 : $(-4t+4,5t-6,-2t+5)$ - 시각 t에서의 점 B의 위치 : $(-t-1,-t-1,t+8)$ - $d(t)=\sqrt{6(3t-2)^2+35}$ 는 $t=\frac{2}{3}$ 에서 최소
	(2)	- 직선 L은 $\vec{v}=(1,2,3)$와 평행 - $\overrightarrow{P_1P_2}=(-4t+s-5,\ 5t+s+5,\ -2t-s+3)=k(1,\ 2,\ 3)$ - $P_1=(0,-1,3),\ P_2=(1,1,6)$
	(3)	- $\lvert\overrightarrow{Q_1Q_2}\rvert^2=\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)$ $=\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)+\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$ $=\lvert\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert^2\geq\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert^2$

- 가점 요인: 글의 논리성, 정확한 근거의 논리적 제시, 서술 능력 등을 종합적으로 판단하여 점수를 결정
- 감점 요인: 비문, 비논리적 전개, 기본 글쓰기 불량(띄어쓰기, 맞춤법 불량 등), 불완전한 수식의 표현 등

[예시답안]

문제 1-A

(1) 점 $P(a,b)$를 지나는 기울기가 m인 직선, 양의 x축, 양의 y축이 결정하는 직각삼각형에 대하여, 그 면적을 $S(m)$이라고 하면

$$S(m)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{m}\right)\left(b-am\right)=\frac{1}{2}\left(2ab-a^2m-\frac{b^2}{m}\right)$$

이 된다. $S(m)$의 도함수를 구하면

$$S'(m)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b+am)(b-am)}{m^2}$$

이다. a,b는 양수이고, 기울기 m은 음수이므로, S'의 부호는 $m=-\frac{b}{a}$을 기준으로 음에서 양으로 변한다. 따라서 $S(m)$은 $m=-\frac{b}{a}$일 때 최소값 $S\left(-\frac{b}{a}\right)=2ab$ 를 갖는다. 그러므로

$$F(a,b)=S\left(-\frac{b}{a}\right)=2ab$$

이다.

(2) 점 $P(a,b)$가 곡선 $y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ 위에 놓이므로, $b=2\sqrt{1-\frac{a^2}{9}}$이 성립한다. 이를 문항 (1)에서 얻은 $F(a,b)$의 식에 대입하면

$$G(a)=F\left(a,\,2\sqrt{1-a^2/9}\right)=\frac{4}{3}a\sqrt{9-a^2},\quad (0<a<3)$$

를 얻는다. $G(a)$의 도함수를 구하면

$$G'(a)=\frac{4}{3}\sqrt{9-a^2}-\frac{4}{3}a\frac{a}{\sqrt{9-a^2}}=\frac{4}{3\sqrt{9-a^2}}(9-2a^2)$$

이다. 열린 구간 $(0,3)$에서 도함수 $G'(a)$의 부호가 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$을 기준으로 양에서 음으로 변하므로, $G(a)$는 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값을 갖는다. 따라서 $F(a,b)$는 점 $P\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$에서 최댓값 6을 갖는다.

문제 1-B

(1) 점 A의 속도벡터 $\vec{a}$는 $(4,-5,2)$와 평행한 벡터 중에서 크기가 $3\sqrt{5}$이고 x성분이 음수인 벡터이므로, $\vec{a}=(-4,5,-2)$이다. 또한 점 B의 속도벡터 $\vec{b}$는 $(1,1,-1)$과 평행한 벡터 중에서 크기가 $\sqrt{3}$이고 x성분이 음수인 벡터이므로, $\vec{b}=(-1,-1,1)$이다.
점 A의 출발점은 $(4,-6,5)$이고 그 속도는 $\vec{a}=(-4,5,-2)$이므로, 시각 t에서의 점 A의 위치는

$$(4,-6,5)+t(-4,5,-2)=(-4t+4,5t-6,-2t+5)$$

이다. 또한, 점 B의 출발점은 $(-1,-1,8)$이고 그 속도는 $\vec{b}=(-1,-1,1)$이므로, 시각 t에서의 점 B의 위치는

$$(-1,-1,8)+t(-1,-1,1)=(-t-1,-t-1,t+8)$$

이다. 따라서 시각 t에서의 두 점 A, B 사이의 거리는

$$d(t)=\sqrt{(3t-5)^2+(-6t+5)^2+(3t+3)^2}$$

으로 주어진다. 위 식을 정리하면

$$d(t)=\sqrt{54t^2-72t+59}=\sqrt{6(3t-2)^2+35}$$

이다. 따라서 $t=\frac{2}{3}$일 때, 즉 $\frac{2}{3}$시간 후 두 점 A, B 사이의 거리가 가장 가까워진다.

(2) L의 방향벡터를 $\vec{v}=(a,b,c)$라고 하자. 벡터 $\vec{v}$는 L_1의 방향벡터 $\overrightarrow{v_1}=(4,-5,2)$과 L_2의 방향벡터 $\overrightarrow{v_2}=(-1,-1,1)$과 모두 수직이므로, $\vec{v}\cdot\overrightarrow{v_1}=0$ 과 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$ 이 성립한다. 이로부터 일차연립방정식

$$\begin{cases}4a-5b+2c=0\\ a+b-c=0\end{cases}$$

을 얻고, 이를 계산하여

$$b=2a,\ \ c=3a$$

이 된다. 따라서 직선 L은 $\vec{v}=(1,2,3)$와 평행이다.

P_1,P_2는 각각 L_1,L_2 위의 점이므로, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_1=(4t+4,-5t-6,2t+5),\quad P_2=(s-1,s-1,-s+8)$$

이때 직선 L은 $\overrightarrow{P_1P_2}$와 평행이므로, 어떤 실수 k에 대하여

$$(-4t+s-5,5t+s+5,-2t-s+3)=k(1,2,3)$$

이 성립한다. 위 식을 계산하면 $t=-1$과 $s=2$가 되므로,

$$P_1=(0,-1,3),\ P_2=(1,1,6)$$

을 얻는다.

(3) 직선 L_1위의 점 Q_1과 L_2 위의 점 Q_2에 대하여, 벡터 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$을

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2Q_2}$$

로 쓸 수 있다. 벡터 $\overrightarrow{Q_1P_1}$과 $\overrightarrow{Q_2P_2}$가 모두 $\overrightarrow{P_1P_2}$와 수직이 됨을 이용하면

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right|^2=\overrightarrow{Q_1Q_2}\cdot\overrightarrow{Q_1Q_2}&=\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)\\
&=\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right)+\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\\
&=\left|\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2\\
&\geq\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2
\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서

$$\left|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right|\geq\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$$

가 성립한다.

자연계 [문제 2] 평가항목

[출제의도]

과학적인 내용을 담고 있는 제시문을 통하여 기초 지식의 이해 여부 및 주어진 조건에 맞는 결과를 찾아낼 수 있는 과학적 사고 능력을 평가하는 문제이다. 제시문에서 주어진 허블의 법칙과 산/염기 반응에 대해 이해하고 논리적인 추론을 통하여 요구되는 결과를 도출한 뒤 이를 해석할 수 있는 능력을 평가한다.

[요소별 평가항목]

문항 번호		세부 평가항목
문제 2-A	(1)	- 허블 상수의 역수가 우주의 나이 - $1/H = r/v = \dfrac{320\text{만광년}}{70\ \text{km/s}} = \dfrac{320\times10^4\text{년}\times 3\times10^5\ \text{km/s}}{70\ \text{km/s}} \sim 137\text{억년}$
	(2)	- v_{AB}가 $-v_{OA}$와 v_{OB}의 벡터합임 - $v_{AB} = H\times r_{AB}$
문제 2-B	(1)	- 용액에서 $[\text{H}^+]_{\text{총}} = [\text{H}^+]_{\text{산}} + [\text{H}^+]_{\text{물}}$ $[\text{OH}^-]_{\text{총}} = [\text{OH}^-]_{\text{물}} = [\text{H}^+]_{\text{물}} = x$ - $K_w = [\text{H}^+]_{\text{총}}[\text{OH}^-]_{\text{총}}$ $= (1.0\times10^{-7} + x)x = 1.0\times10^{-14}$ - $[\text{H}^+]_{\text{총}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times10^{-7}\,(\text{M})$
	(2)	- 처음 0.10 M 염산(HCl) 10.0 mL에 들어 있는 이온의 몰 수 $n = 2.0\times10^{-3}\text{몰}(mole)$ - 1. $V < 5.0\,\text{mL}\ : n = 2.0\times10^{-3}\text{몰}(mole)$ 2. $V \geq 5.0\,\text{mL}\ : n = 4.0\times V\times10^{-4}\text{몰}(mole)$ - 그림
	(3)	- 총 이온의 농도 1. $V < 5.0\ \text{mL}\ : c = \dfrac{2.0}{10.0+V}$ 2. $V \geq 5.0\,\text{mL} : c = \dfrac{0.4\times V}{10.0+V}$ - 이온의 농도가 최소가 되는 NaOH의 부피 V = 5.0 mL - V = 5.0 mL에서 최소가 되는 근거를 합리적으로 기술

- 가점 요인: 글의 논리성, 정확한 근거의 논리적 제시, 서술 능력 등을 종합적으로 판단하여 점수를 결정
- 감점 요인: 비문, 비논리적 전개, 기본 글쓰기 불량(띄어쓰기, 맞춤법 불량 등), 부적절한 단위를 사용한 경우, 불완전한 수식의 표현 등

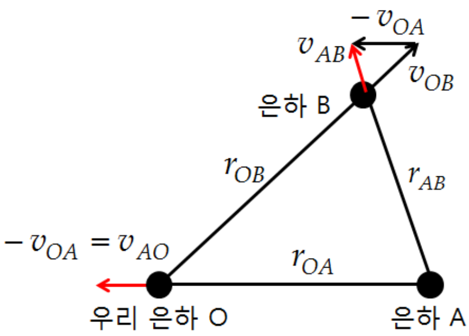
문제 2-A

(1) 제시문에 따라 허블 상수의 역수가 우주의 나이가 된다. 논제에서 주어진 데이터를 활용하여 허블 상수의 역수를 다음과 같이 계산한다.

$$1/H = r/v = \frac{320\text{만광년}}{70\ \mathrm{km/s}} = \frac{320\times10^4\ \text{년} \times 3\times10^5\ \mathrm{km/s}}{70\ \mathrm{km/s}} \sim 137\text{억년}$$

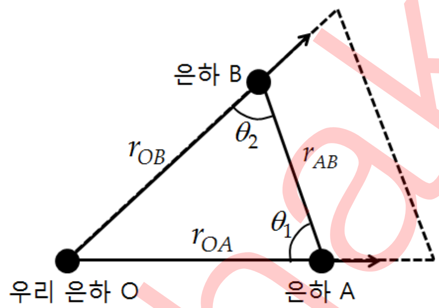
(2)
1) 벡터 이용(거리와 속도를 벡터로 고려. 벡터 표시는 하지 않음)
$v_{AB} = v_{OB} - v_{OA}$이고, r_{AB}는 $r_{AB} = r_{OB} - r_{OA}$이다.
따라서 $v_{AB} = v_{OB} - v_{OA} = H\times r_{OB} - H\times r_{OA} = H\times(r_{OB} - r_{OA}) = H\times r_{AB}$가 된다.

2) (닮은꼴 이용) 속도를 그림으로 표현하면, 다음과 같다.



v_{OA}와 v_{OB}가 각각 r_{OA}와 r_{OB}의 크기에 비례한다. 은하의 위치를 나타내는 삼각형과 은하의 속도를 나타내는 삼각형에 대해 *SAS* 닮음 조건을 만족하므로 두 삼각형은 닮은꼴이 되고, 닮음비는 허블 상수이다. 따라서 v_{AB}의 크기는 r_{AB}에 비례하여, 허블 법칙 $v_{AB} = H\times r_{AB}$를 만족한다.

3) 은하 A, B가 은하 O와의 거리에 비례하여 후퇴함에 따라 커지는 은하의 위치 삼각형에서 θ_1과 θ_2는 변하지 않는다. 따라서, v_{AB}를 구해보면,



$$r_{AB} = r_{OA}\cos\theta_1 + r_{OB}\cos\theta_2$$

$$\begin{aligned} v_{AB} = \frac{dr_{AB}}{dt} &= \frac{dr_{OA}}{dt}\times\cos\theta_1 + \frac{dr_{OB}}{dt}\times\cos\theta_2 \\ &= v_{OA}\cos\theta_1 + v_{OB}\cos\theta_2 \\ &= H\times r_{OA}\cos\theta_1 + H\times r_{OB}\cos\theta_2 \\ &= H\times(r_{OA}\cos\theta_1 + r_{OB}\cos\theta_2) \\ &= H\times r_{AB} \end{aligned}$$

그러므로, v_{AB}에 대해 허블 법칙을 만족한다.

문제 2-B

(1) 산 용액에서 총 [H^+]은 산의 해리로 생성된 것과 물의 자동 이온화로 생성된 양의 합이다.

$$[H^+]_{총} = [H^+]_{산} + [H^+]_{물} = 1.0\times10^{-7} + x$$

OH^-은 물의 자동 이온화로 생성되므로,

$$[OH^-]_{총} = [OH^-]_{물} = [H^+]_{물} = x$$

물의 이온곱 상수는 일정하므로,

$$K_w = [H^+]_{총}[OH^-]_{총} = (1.0\times10^{-7} + x)x = 1.0\times10^{-14}$$

이차 방정식의 풀이를 통해 x를 구한다.

$$x^2 + 1.0\times10^{-7}x - 1.0\times10^{-14} = 0$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\times10^{-7} \quad (\because x > 0)$$

따라서 $[H^+]_{총} = 1.0\times10^{-7} + x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times10^{-7}\,(\mathrm{M})$.

위 결과로 물의 자동 이온화에 의한 [H^+]을 무시할 수 없음을 알 수 있다.

(2) 처음 0.10 M 염산(HCl) 10.0 mL에 들어 있는 이온의 몰수: n

$n = n(H^+) + n(Cl^-) = 0.10 \times 10.0 \times 10^{-3} + 0.10 \times 10.0 \times 10^{-3}$

$= 2.0 \times 10^{-3}$ 몰 (mole)

당량점인 V = 5.0 mL에서 처음 H^+과 첨가된 OH^-이 같아지므로, V = 5.0 mL 전후 상황을 다르게 고려한다.

1) V < 5.0 mL

첨가한 NaOH은 HCl과 모두 반응, 둘 다 100% 이온화하므로

$$Na^+ + OH^- + H^+ + Cl^- \rightarrow H_2O + Na^+ + Cl^-$$

사라지는 H^+만큼 Na^+이 생기므로 전체 이온의 몰 수는 2.0×10^{-3} 몰로 일정하다.

2) $V \geq$ 5.0 mL

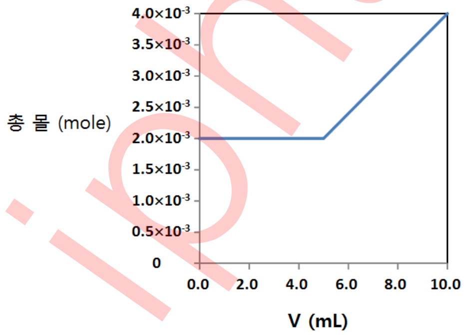
HCl이 모두 반응하였으므로 추가로 들어간 NaOH이 해리되어 용액의 이온 몰 수가 증가한다.

$n = 2.0 \times 10^{-3} + 2 \times (V - 5.0) \times 0.20 \times 10^{-3}$

$= 2.0 \times 0.20 \times V \times 10^{-3}$

$= 4.0 \times V \times 10^{-4}$ 몰 (mole) (등호가 1의 경우에 있어도 무방함.)

이를 그래프로 그리면 다음과 같다. (그림 1)



(1점)

그림 1

(3) 총 이온의 농도, c = (총 이온 몰 수)/(총 부피)이므로

1) $V < 5.0$ mL

$$V_{총} = 10.0 + V$$

$$c = \frac{2.0 \times 0.10 \times 10.0}{10.0 + V} = \frac{2.0}{10.0 + V}$$

2) $V \geq 5.0$ mL

$$c = \frac{4.0 \times 0.10 \times V}{10.0 + V} = \frac{0.4 \times V}{10.0 + V}$$

(등호가 1의 경우에 있어도 무방함.) (그림 2 참조)

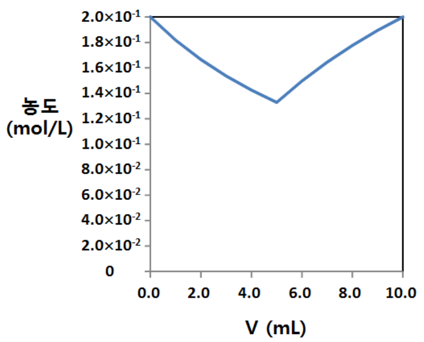


그림 2

위 결과로 총 이온의 농도가 최소가 되는 NaOH의 부피는 5.0 mL 이다.
(그래프의 개략적인 모양만 사용하거나 위 두 구간의 양 끝점에서의 값을 비교하여 보여도 무방함.)