◆ 출제문제 ◆

【문제 1】

문제 1-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

(가) 좌표평면 위의 변환 $f:(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})$가

$$\begin{cases}\tilde{x} = ax + by \\ \tilde{y} = cx + dy\end{cases}$$

의 꼴로 나타날 때, 이 변환 f를 일차변환이라고 한다. 이 일차변환을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}\tilde{x} \\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$

로 표현할 수 있다. 이때, 행렬 $A = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$를 일차변환 f의 행렬이라고 한다.

(나) 일차변환 f가 주어져 있을 때, 도형 C는 일차변환 f에 의해 다른 도형으로 옮겨진다. 이때 일차변환 f의 행렬이 가역이면, 일차변환 f는 직선을 직선으로 옮기고, 곡선을 곡선으로 옮긴다.

[출처 : 기하와 벡터「일차변환과 행렬」]

일차변환 $f:(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})$의 행렬이

$$A = \begin{pmatrix}2 & -2 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

이고, 도형 C는 중심이 원점 $O(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 도형 C가 일차변환 f에 의하여 옮겨진 도형을 $\tilde{C}$라고 할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) 점 $Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$가 도형 $\tilde{C}$ 위의 점임을 보이고, 도형 $\tilde{C}$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기를 구하시오.

(2) 도형 $\tilde{C}$와 원점 사이의 최소 거리를 구하시오.

문제 1-B **다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)**

(가) 점 P가 좌표공간에서 움직일 때, 시각 t에서의 점 P의 위치를 (x, y, z)라고 하면, x, y, z는 t의 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$와 같이 나타낼 수 있다. 점 P에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 U, V, W라고 하면 점 P가 움직일 때 점 U는 x축 위에서 $x=f(t)$로 나타내어지는 직선운동을 하고, 점 V와 점 W는 각각 y축과 z축 위에서 $y=g(t)$, $z=h(t)$로 나타내어지는 직선운동을 한다. 따라서 시각 t에서의 세 점 U, V, W의 속도를 각각 v_x, v_y, v_z라고 하면

$$v_x=\frac{dx}{dt}=f'(t),\ v_y=\frac{dy}{dt}=g'(t),\ v_z=\frac{dz}{dt}=h'(t)$$

이다. 좌표공간에서 움직이는 점 P의 속도는 순서쌍 (v_x, v_y, v_z)로 나타내고, $\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$을 속도의 크기 또는 속력이라고 한다.

[출처 : 수학 II「미분법」]

(나) 점 $P(x_0, y_0, z_0)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(\ell, m, n)$에 평행한 직선의 방정식은 $\ell mn \neq 0$인 경우

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

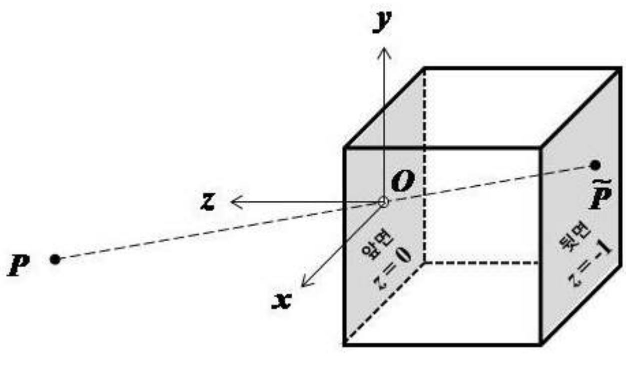
이다. 만일 $\ell=0$, $mn \neq 0$이면 직선의 방정식은

$$x=x_0,\quad \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

이고, 이는 점 $P(x_0, y_0, z_0)$을 지나고 yz평면과 평행한 직선을 나타낸다.

[출처 : 기하와 벡터「벡터」]

핀홀카메라는 바늘구멍처럼 작은 구멍(핀홀)을 통해 들어오는 빛을 일정한 거리에 있는 감광지에 맺히게 하여 사진을 찍는 간단한 상자 형태의 카메라이다. 속을 어둡게 칠한 상자의 앞면에는 작은 구멍을 뚫고, 뒷면 안쪽에는 감광지를 놓아 상을 맺히게 한다. 조리개가 없기 때문에 구멍을 되도록 작게 뚫고, 셔터 대신 핀홀을 손으로 가리거나 적당한 마개를 사용하여 노출 시간을 조절한다.



<그림 1>

<그림 1>과 같이 핀홀카메라의 앞면이 평면 $z=0$에, 뒷면이 평면 $z=-1$에 놓여 있고, 핀홀은 앞면 위의 점 $O(0,0,0)$에 위치할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) $c>0$인 점 $P_1(a, b, c)$가 감광지에 맺힌 상 $\widetilde{P_1}$의 좌표를 구하시오.

(2) 점 $Q(1, -3, 1)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(-2, 3, 1)$에 평행한 직선 위를 움직이는 점 P_2가 있다. 일정시간 경과 후, 감광지에 점 P_2의 상 $\widetilde{P_2}$의 자취가 선분으로 남았다. 이 선분을 포함하는 직선의 방정식을 구하시오.

(3) 점 P_3 가 좌표공간에서 움직일 때, 시각 t에서의 점 $P_3(x, y, z)$의 위치가

$$x = t-2,\ y = t-1,\ z = \frac{1}{t+1} \quad (0 \le t \le 10)$$

이다. t의 구간 $[0, 10]$에서 점 P_3의 상 $\widetilde{P_3}$의 속력이 최소가 되는 시각 T와 그때의 속력을 구하시오.

【문제 2】

문제 2-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

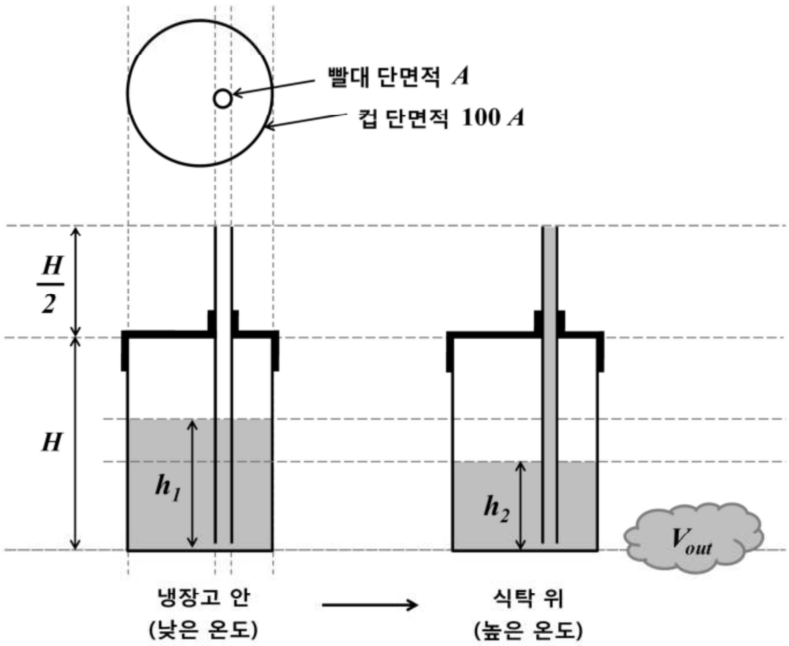
(가) 기체는 고체나 액체에 비하여 그 움직임이 매우 활발한 많은 수의 입자들로 구성되어 있다. 이 기체를 이루고 있는 입자 하나하나의 운동을 모두 기술하는 것은 매우 복잡한 일이지만, 기체의 거시적인 특성인 온도, 압력, 부피는 비교적 간단하게 기술할 수 있다. 입자들 사이에 서로 힘이 작용하지 않고 입자의 크기가 매우 작아 점과 같다고 가정할 수 있는 이상기체의 경우, 온도 T, 압력 P, 부피 V 사이에는 다음과 같은 이상기체 상태 방정식이 성립한다.

$$PV = nRT \qquad (n\text{: 기체 입자의 몰수, } R\text{: 기체상수})$$

이상기체 상태 방정식에서 온도가 일정한 경우 압력과 부피는 서로 반비례하는데 이를 보일 법칙이라 하며, 압력이 일정한 경우는 부피와 온도가 비례하는데 이를 샤를 법칙이라 한다.

[출처 : 화학 Ⅱ「다양한 모습의 물질」, 물리 Ⅰ「에너지」]

<그림 2>의 왼쪽 그림과 같이 빨대가 컵에 꽂힌 채로 냉장고 속에 오래 보관되어 있었다. 컵은 잘 밀봉되어 있어서 공기가 새지 않는다. 이 컵을 식탁에 꺼내어 두었더니, 물이 빨대를 통해 밖으로 넘치다가 얼마 후 멈추어 **<그림 2>**의 오른쪽 그림과 같이 되었다.



<그림 2>

(H: 컵의 높이, h_1, h_2: 컵에 담긴 물의 높이, A: 빨대의 단면적, V_{out}: 넘친 물의 부피,

빨대 중 컵 위로 나온 부분의 높이 = $\frac{H}{2}$, 컵의 단면적 = $100A$)

다음 문항에 답하시오.

(1) 냉장고 안과 식탁 주변의 온도를 모른다고 할 때, 넘친 물의 부피 V_{out} 을 **<그림 2>**에 나타난 4개의 변수 H, h_1, h_2, A만의 식으로 표현하시오.

(2) **<그림 2>**에서 식탁 주변 온도가 냉장고 내부 온도의 $\frac{10}{9}$배일 때, 제시문 (가)의 내용을 이용하여 컵에 남아있는 물의 높이 h_2를 h_1과 H로 표현하시오. (단, 컵 안의 공기는 이상기체이며, 온도에 따른 컵 내부 공기압의 변화는 매우 적으므로 무시하고, 물에 대한 공기의 용해도, 물의 부피, 물의 증기압은 항상 일정하다고 가정하자.)

(3) 문항 (1)과 문항 (2)의 결과를 이용하여, V_{out}을 3개의 변수 H, h_1, A만의 식으로 표현하시오. 그리고 H와 A가 고정되어 있을 때, 식탁 위에서 물이 넘치게 되는 h_1의 범위를 구하시오. (단, $h_1 > \frac{H}{10}$)

문제 2-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

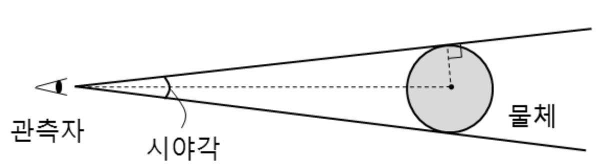
(가) 한국천문연구원은 6월 23일(음력 5월 15일)에 올해 들어 가장 크게 보이는 보름달이 뜬다고 밝혔다. 반대로 가장 작게 보이는 보름달은 12월 17일(음력 11월 15일)에 뜬다. 지구상에서 달의 크기가 다르게 보이는 이유는 달이 지구 주위를 타원 궤도로 돌기 때문이다. 지구와 달 사이의 거리가 가까우면 달이 커 보이고 멀면 작게 보인다. 6월 23일 오후 8시 32분, 지구와 달의 거리는 3.6×10^5 km로 가장 가깝다. 또한 12월 17일 오후 6시 28분에는 4.0×10^5 km로 가장 멀다. 따라서 올해는 6월의 보름달이 가장 크게 보이고 12월의 보름달이 가장 작게 보이는 것이다.

[출처 : 한국천문연구원의 2013년 6월 보도 자료]

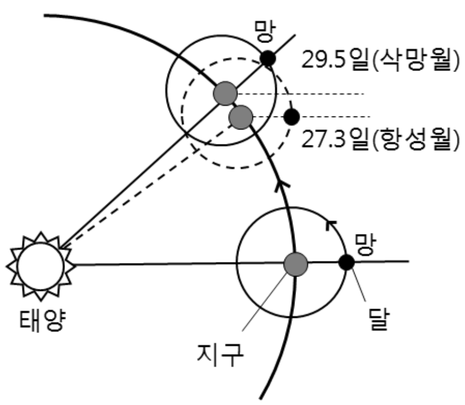
(나) 달은 지구 주위를 공전하고 있기 때문에, 지구에서 관측할 때 지구와 태양에 대한 달의 상대적인 위치에 따라 태양빛을 반사하는 면이 달라진다. 달이 태양과 같은 방향에 있어서 보이지 않을 때를 삭, 태양의 반대 방향에 있어서 보름달이 되는 때를 망이라고 한다. 그리고 해가 진 직후 달의 위치를 관측하면 매일 조금씩 동쪽으로 이동하는 것을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 달이 지구 주위를 서쪽에서 동쪽으로 공전하기 때문에 일어난다.

달이 별자리를 기준으로 지구 주위를 공전하는데 약 27.3일이 걸리는데, 이것을 **항성월**이라고 한다. 그리고 달의 모양이 변하여 다시 같은 모양이 될 때까지는 약 29.5일이 걸리는데, 이것을 **삭망월**이라 고 한다. 음력은 삭망월을 한 달로 정하여 사용하고 있다. 이와 같이 항성월과 삭망월이 차이가 나는 이유는 달이 지구 주위를 공전하는 동안 지구도 태양 주위를 공전하기 때문이다.

[출처 : 과학「태양계와 지구」]



<그림 3>



<그림 4>

다음 문항에 답하시오.

(1) 우리가 인식하는 물체의 겉보기 크기는 **<그림 3>**과 같이 시야각의 크기로 결정된다. 제시문 (가)를 참고하여 달의 최대 겉보기 크기가 달의 최소 겉보기 크기의 약 1.1배가 됨을 설명하시오. (단, 지구에서 달까지의 거리에 비해 달의 크기는 매우 작다. 또한, 충분히 작은 θ에 대해서는 $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta \fallingdotseq \theta$이다.)

(2) 우리 태양계가 아닌 다른 태양계에 태양 주위를 공전하는 어떤 행성과 이 행성 주위를 공전하는 위성이 있다. 제시문 (나)에서 설명한 태양-지구-달의 경우와 마찬가지로 위성의 항성월과 삭망월을 정의할 때 (**<그림 4>** 참조), 위성의 항성월은 700시간이고 삭망월은 770시간이다. 이 행성의 공전주기를 구하시오. (**단, 행성과 위성의 공전궤도는 모두 원이라 가정한다.**)

<끝>