자연계 문제 1 문제해설

[출제의도]

본 문제는 함수에 대한 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 적분 및 연속확률분포 모형에서의 확률과 기댓값 계산에 연결하는 창의적 학습능력, 그리고 기하학적인 현상을 분석하는 논리적 사고능력을 평가하는데 목적이 있다.

[예시답안]

문제 1-A

(1) $P(x<h)=0.9$인 h를 계산하여 그 높이 h의 부츠를 생산하면 된다. 즉, $\int_h^{\frac{4}{3}} f(x)\,dx=0.1$을 만족하는 h를 계산하여야 한다. 이때, $\int_0^1 x^{\frac{1}{5}}\,dx=\frac{5}{6}$이므로, h는 1보다 커야만 한다. 이 구간에서의 확률밀도함수는 $-3x+4$이다. 따라서 $\int_h^{\frac{4}{3}}(-3x+4)\,dx=0.1$을 만족하는 h를 찾으면 된다. 적분 계산 결과

$$-\frac{3}{2}x^2+4x\Big|_h^{\frac{4}{3}}=0.1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}h^2-4h+\frac{77}{30}=0$$

를 얻고, 여기서 h는 $\frac{4}{3}$ 보다 작아야 하므로, $h=\frac{4}{3}-\frac{1}{\sqrt{15}}$이 된다. 따라서, 부츠의 높이는 $\frac{40}{3}-\frac{10}{\sqrt{15}}$인치로 제작하면 된다.

(2) 겨울 100일 중 눈이 올 것으로 예상되는 날은 30일이다. 연속확률분포에서의 기댓값은 확률밀도함수와 적설량을 곱한 함수를 적분하여 계산하므로, 1일 적설량의 기댓값은 다음과 같다.

$$\int_0^1 x\cdot x^{\frac{1}{5}}\,dx+\int_1^{\frac{4}{3}} x(-3x+4)\,dx=\frac{5}{11}x^{\frac{11}{5}}\Big|_0^1+(-x^3+2x^2)\Big|_1^{\frac{4}{3}}=\frac{190}{297}.$$

10인치 당 2톤의 염화칼슘이 필요하므로, 1일 염화칼슘 필요예상량은 $\frac{380}{297}$톤이다. 따라서, 이 도시는 30일 분의 염화칼슘으로, 약 38.38톤의 염화칼슘이 필요할 것으로 기대된다.

문제 1-B

(1) 지점 $P(-4,6)$은 염색제가 퍼지기 시작하는 지점 $A(-4,0)$으로부터의 거리가 6이고, 표백제가 퍼지기 시작하는 지점 $B(4,0)$으로부터의 거리가 10이다. 따라서, 지점 P에는 6초 후에 염색제가 도달하고, 그 후로부터 4초 뒤에 표백제가 도달하므로, 염색제가 고착되기에는 시간이 충분치 않아 염색이 되지 않을 것이다.

(2) 염색이 이루어지는 지점들은 B로부터의 거리가 A로부터의 거리보다 5cm 이상 먼 지점들이다. 따라서, 염색이 이루어지는 지점들과 이루어지지 않는 지점들의 경계는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+5=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$-16x-25=10\sqrt{(x+4)^2+y^2}$$

을 얻는다. 다시 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같은 쌍곡선의 방정식을 얻는다.

$$156x^2 - 100y^2 - 975 = 0$$

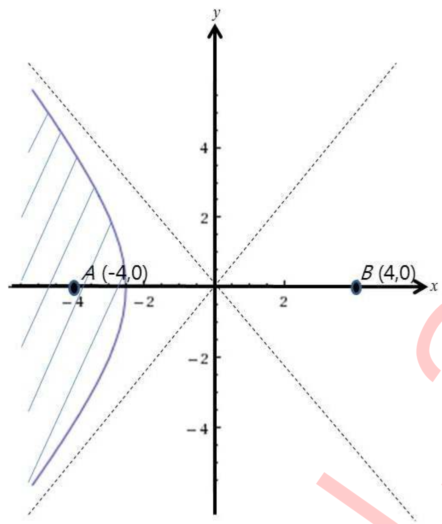
구하려는 경계점들은 이 쌍곡선 위의 점들 중에서 B로부터의 거리가 A로부터의 거리보다 먼 점들이므로

$$156x^2 - 100y^2 - 975 = 0, \quad x < 0$$

이 경계가 된다. 따라서 이 경계로 이루어진 영역 중 점 A를 포함하는 영역, 즉

$$D = \{(x, y) \mid 156x^2 - 100y^2 - 975 \geq 0,\ x < 0\}$$

이 염색이 되는 지점들의 영역이다. 이를 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



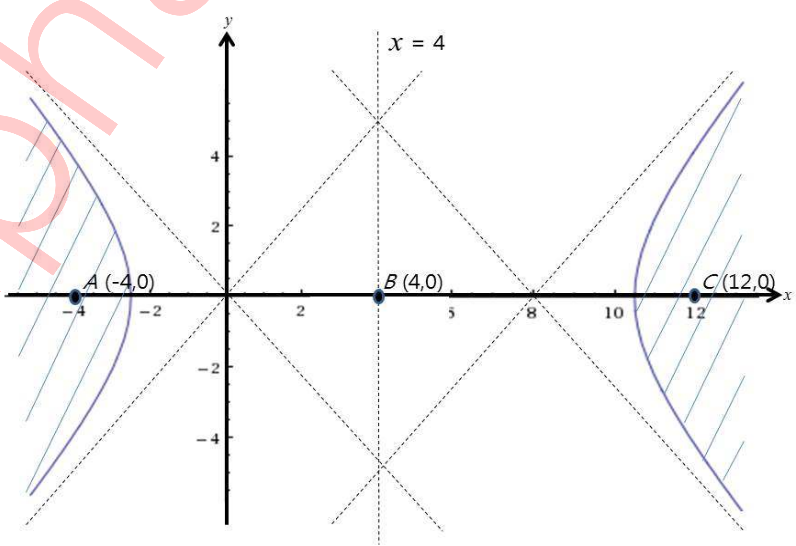
(3) 표백제가 속한 직선 $x = 4$를 기준으로 볼 때, 이 직선 왼쪽 영역은 지점 A에서 출발하는 염색제가, 오른쪽 영역은 지점 C에서 출발하는 염색제가 먼저 도착한다. 따라서, 염색되는 영역은 직선 $x = 4$를 기준으로 하여 왼쪽은 A와 B, 오른쪽은 B와 C에 의해 경계가 결정된다. A와 B 에 의해 결정되는 영역 D는 아래와 같이 문제 (2)에서 구하였다.

$$D = \{(x, y) \mid 156x^2 - 100y^2 - 975 \geq 0,\ x < 0\}$$

B와 C에 의해 결정되는 영역 D'은 (2)에서 구한 영역을 직선 $x = 4$를 중심으로 대칭이동 하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$D' = \{(x, y) \mid 156(8 - x)^2 - 100y^2 - 975 \geq 0,\ x > 8\}$$

따라서 염색이 되는 지점들의 영역은 $R = D \cup D'$이다. 이를 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



자연계 문제 2 문제해설

[출제의도]

본 문제는 빛과 에너지에 관한 현상을 담고 있는 제시문을 통하여 과학적 현상을 이해하고 분석하는 능력을 평가하는 문제이다. 특히 주어진 과학적 현상에 대한 수리적 모형을 세우고, 논리적인 추론을 통하여 문제를 해결하는 통합적 사고 능력을 평가하는 데 그 목적이 있다.

[예시답안]

문제 2-A

(1) 광선의 단면적은

$$S = \pi w^2 = \pi w_o^2\left[1+\left(\frac{\lambda d}{\pi w_o^2}\right)^2\right] = \pi w_o^2 + \frac{\lambda^2 d^2}{\pi w_o^2}$$

이므로, 이를 최소화하는 값을 찾기 위해 위의 식을 w_0로 미분한 일차도함수를 구하자.

$$\frac{dS}{dw_o} = 2\pi w_o - \frac{2\lambda^2 d^2}{\pi} w_o^{-3}$$

w_0로 미분한 일차도함수 $\frac{dS}{dw_o}$ 가 음에서 양으로 변하는 점을 찾으면 되는데, 이차도함수

$$\frac{d^2 S}{dw_o^2} = 2\pi + \frac{6\lambda^2 d^2}{\pi} w_o^{-4}$$

가 항상 양의 값을 가지므로, 일차도함수가 증가함수이고, 따라서 위의 일차도함수를 0으로 만드는 점을 찾으면 된다. 즉, $\frac{dS}{dw_o} = 0$을 풀면

$$w_o^4 = \frac{\lambda^2 d^2}{\pi^2}$$

을 얻고, 따라서

$$w_o = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}}$$

이다. 이를 면적의 식에 대입하면

$$S = \pi w^2 = 2\lambda d$$

를 얻는다.

(2) 단면 반지름이 w_0의 5/4가 되는 위치, 즉 $w = \frac{5}{4}w_0$를 만족하는 값을 z^*라 하면,

$$w = \frac{5w_o}{4} = w_o\left[1+\left(\frac{\lambda z^*}{\pi w_o^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

이다. 양변에서 w_0를 소거하면

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1+\left(\frac{\lambda z^*}{\pi w_o^2}\right)^2$$

를 얻고, 이를 정리하면

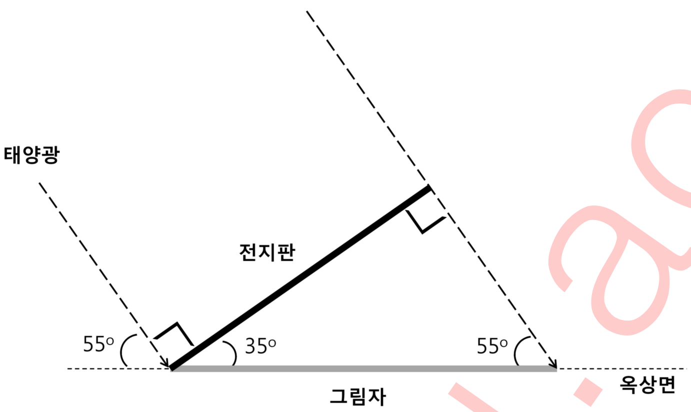
$$z^* = \pm\frac{\pi w_o^2}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \pm\frac{3\pi w_o^2}{4\lambda}$$

이다. 초점 심도 Δz는 이 두 위치 간의 거리이므로 $\frac{3\pi w_o^2}{2\lambda}$이다.

문제 2-B

(1) 제시문에서 설명한 것과 같은 온실효과에 의한 현상이다. 즉, 오른쪽 그래프에서 보듯이 태양복사선은 파장이 $0.3 \sim 2\mu m$로 짧은 반면에, 실온의 물체로부터 방출되는 빛은 파장이 $3\mu m$ 이상으로 긴 장파 적외선이다. 그런데, 왼쪽 그래프에서 보면 유리는 파장이 짧은 빛 (0.3~3 μm)은 투과를 잘 시키지만 파장이 긴 빛은 투과시키지 못한다. 따라서 외벽이 유리인 건물에 햇볕이 내리쬘 때 태양복사선은 유리를 쉽게 투과하여 건물 내부에 도달하고 건물 내무 물체들의 온도를 올리게 되지만, 건물 내부의 물체들이 내어놓는 파장이 긴 빛들은 유리를 투과하지 못하므로 유리 청사 내부에 그 에너지가 머무르게 된다. 이러한 온실효과 때문에 유리 청사는 햇볕이 내리쬘 때 외부보다 그 내부의 온도가 높게 유지된다.

(2) 전지판은 지면으로부터 35°의 각도로 정남향으로 설치되고, 태양광은 지면으로부터 55°의 각도로 비추므로 태양광이 전지판에 입사하는 각도는 아래 그림과 같이 $90^\circ = (180-(35+55))^\circ$ 이다.



위 그림에서 전지판 한 장의 그림자 세로 길이는 $\dfrac{1}{\cos 35^\circ}$ 미터이다. 따라서 옥상면의 세로 방향으로 전지판이 n장이 설치될 수 있다면, n은 다음 식을 만족하여야 한다.

$$n \times \frac{1}{\cos 35^\circ} \le 30 \qquad (n\text{은 양의 정수})$$

따라서 n은

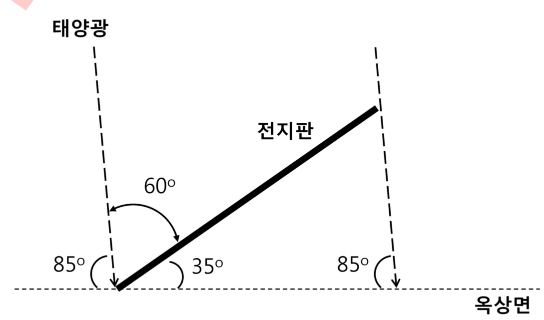
$$n \le 30\cos 35^\circ = 24.6$$

을 만족하는 가장 큰 양의 정수이므로, $n = 24$ 임을 알 수 있다. 즉, 옥상면의 세로방향으로는 전지판을 최대 24장 설치할 수 있다.
한편 전지판 한 장의 그림자 가로 길이는 전지판의 가로 길이와 동일하게 1 미터이므로, 옥상면의 가로방향으로는 전지판을 30장 설치할 수 있다.
따라서 옥상면에 설치할 수 있는 태양광 전지판의 최대 개수는 $24 \times 30 = 720$ 장이다.

(3) 전지판에 대한 태양광선의 입사각은 문제(2)의 경우는 90° 이다. 한편, 이번 경우의 그 입사각은

$$60^\circ = (180-(35+85))^\circ$$

이다 (아래 해설그림 참조).



이 경우 태양 광선에 수직인 가상의 평면에 생기는 전지판 그림자의 면적은 전지판 면적의 $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 이 경우 전지판에 입사하는 태양광 에너지의 양은 (2)번 경우의 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.