◇자연

[문제 1]

1. 출제의도

본 문제는 미분, 적분, 역함수 등의 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 수리적 의사결정, 물체의 운동 등 다양한 분야에 적용할 수 있는 논리적 사고 능력과 통합적 문제 해결 능력을 평가하는데 목적이 있다.

2. 예시답안

문제 1-A

(1) x년 동안 장비를 사용한다고 할 때 초기투자비는 20이므로 연평균 초기투자비 $I(x)=\dfrac{20}{x}$ $(x>0)$이다.

x년 동안 발생하는 운영유지비는 $\int_0^x f(t)dt$이므로,

i) $0<x\le 2$일 때, x년 동안의 운영유지비는 $\int_0^x 6t\,dt = 3x^2$이다.

따라서 연평균 운영유지비 $M(x)=\dfrac{3x^2}{x}=3x$이다.

ii) $x>2$일 때, x년 동안의 운영유지비는

$$\int_0^2 6t\,dt + \int_2^x 3t^2 = 12+x^3-8 = x^3+4\text{이다.}$$

따라서 연평균 운영유지비 $M(x)=\dfrac{x^3+4}{x}=x^2+\dfrac{4}{x}$이다.

i, ii)에서 연평균 운영유지비 $M(x)=\begin{cases} 3x, & 0<x\le 2 \\ x^2+\dfrac{4}{x}, & x>2 \end{cases}$

연평균 총비용 $S(x)=I(x)+M(x)$이므로 $S(x)=\begin{cases} \dfrac{20}{x}+3x, & 0<x\le 2 \\ \dfrac{24}{x}+x^2, & x>2 \end{cases}$

(2) 미분계수의 정의 $S'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(2+h)-S(2)}{h}$에 의해 미분가능성을 조사한다.

위에서 좌극한을 구하면

$$\lim_{h\to -0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{\dfrac{20}{2+h}+3(2+h)-16}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}\frac{-4+3h}{2+h} = -2$$

우극한을 구하면

$$\lim_{h\to +0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{\dfrac{24}{2+h}+(2+h)^2-16}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{-4+6h+h^2}{2+h} = -2$$

좌극한과 우극한이 일치하므로 극한이 존재하여 함수 $S(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

(별해)

좌극한을 구하면

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{S(x)-S(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{\frac{20}{x}+3x-16}{x-2}=-2$$

우극한을 구하면

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{S(x)-S(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{\frac{24}{x}+x^2-16}{x-2}=-2$$

좌극한과 우극한이 일치하므로 극한이 존재하여 함수 $S(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

(3) $S(x)=\begin{cases}\frac{20}{x}+3x, & 0<x\le 2\\ \frac{24}{x}+x^2, & x>2\end{cases}$

i) $0<x\le 2$일 때, 함수 $S(x)$의 극값을 구하면

$S'(x)=-\frac{20}{x^2}+3=0$에서 $x=\pm\sqrt{\frac{20}{3}}$

$\sqrt{\frac{20}{3}}>2$이므로 $0<x\le 2$에서는 극값은 없으며, $S'(x)<0$이므로

이 구간에서 $S(x)$는 감소한다.

ii) $x>2$일 때, 함수 $S(x)$의 극값을 구하면

$S'(x)=-\frac{24}{x^2}+2x=0$에서 $x=\sqrt[3]{12}>2$

함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\sqrt[3]{12}$	$\cdots$
$S'(x)$	$-$	0	$+$
$S(x)$	↘	극솟값	↗

따라서 $x=\sqrt[3]{12}$일 때 $S(x)$는 극솟값을 가진다.

i), ii)에서 이 장비의 경제수명은 $\sqrt[3]{12}$년임을 알 수 있다.

문제 1-B

(1) $f(2)=0$이므로 $g(0)=2$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,2)$에서의 접선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $g'(0)=\frac{1}{f'(2)}$이 된다. 이 때 $f'(x)=\sqrt{3+x^2}$이므로 $g'(0)=\frac{1}{\sqrt{7}}$이다.

(2) 시각 t를 위치 s의 함수로 생각하면 $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{s^2-1}$가 된다. 점 P가 $s=3$에 도달하는 시각 T를 구하기 위하여 $s=2$부터 $s=3$까지 이 식을 적분하면

$$T=t(3)-t(2)=\int_2^3\frac{dt}{ds}\,ds=\int_2^3\frac{1}{s^2-1}ds$$

$$=\int_2^3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)ds$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right]_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

[문제 2]

1. 출제의도

과학적인 내용을 담고 있는 제시문을 통하여 기초 지식의 이해력 및 주어진 조건에 맞는 결과를 찾아낼 수 있는 과학적 사고 능력을 평가하는 문제이다. 제시문에서 주어진 DNA, RNA, 단백질과 유전 정보에 대해 이해하고, 논리적인 추론을 통하여 정량적인 결과를 도출하고 이를 해석할 수 있는 능력을 평가한다.

2. 예시답안

문제 2-A

(1) 염기를 표현하는 글자는 4가지이므로 이진수 두 자리로 표현할 수 있다(00,01,10,11). 따라서 $2\times4\times10^9$ 비트 = 10^9 바이트의 저장 공간이 필요하다.

(2) 염기가 4가지이므로 염기 n개를 묶으면 4^n개의 조합을 만들 수 있다. 그러므로 n이 최소 3이어야 $4^3=64>20$ 으로서 아미노산 20개를 표현일 수 있다. 따라서, 아미노산 300개로 이루어진 단백질의 정보를 담으려면 DNA는 최소한 $300\times3=900$개의 염기로 이루어져 있어야 한다.

문제 2-B

(1) 연립방정식

$$\frac{[X]}{a[X]+b}-c[R]=0,$$

$$p[R]-q[X]=0$$

을 푼다. $[R]$을 소거하면

$$-q[X]+\frac{p[X]}{c(a[X]+b)}=0$$

을 얻고 이는 다시

$$acq[X]^2-p[X]+bcq[X]=[X](acq[X]-p+bcq)=0$$

으로 쓸 수 있다.

$$[X]=0,\ \frac{p-bcq}{acq}$$

이다. 농도는 음수가 될 수 없으므로 $[X]\geq0$인 해만이 의미가 있다. 따라서 두 번째 해는 $p>bcq$일 때에만 의미가 있다.

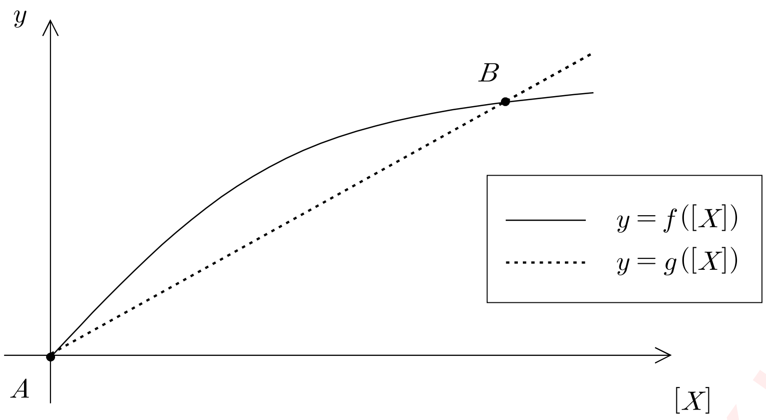
결과를 요약하면,

$$p\leq bcq:\ [X]=0$$

$$p>bcq:\ [X]=0\ \text{or}\ [X]=\frac{p-bcq}{acq}$$

이다.

(2) 단백질의 합성 속도는 $p[R]$인데, 조건 $\frac{[X]}{a[X]+b}-c[R]=0$에서 $[R]=\frac{[X]}{c(a[X]+b)}$이므로, 단백질의 합성 속도는 $f([X])=\frac{p[X]}{c(a[X]+b)}$이다. 또한 단백질의 분해 속도는 $g([X])=q[X]$이다. 교점이 둘인 경우에 대해 이 두 함수를 그리면 다음과 같다.



(1)에서 구한 풀이는 $f([X])=g([X])$에 해당되는 점이므로, 그림에서 두 그래프가 만나는 두 교점 A, B이다.

(3) 점 B에서 농도를 조금 증가시킬 경우 합성 속도보다 분해 속도가 크므로 농도가 감소하고, 농도를 조금 감소시켰을 경우에는 분해 속도보다 합성 속도가 크므로 농도가 증가한다. 그러므로 점 B에서 농도를 조금 변화시키면 원래 상태인 점 B의 농도로 돌아온다. 즉, 점 B의 정상상태는 안정적이다. 반면 농도를 점 A에서 조금 증가시키면 분해 속도보다 합성 속도가 크므로 점 A에서 벗어나 농도가 계속적으로 증가하므로 안정 상태인 점 B의 농도값으로 접근한다. 따라서 점 A부근과 점 B부근의 농도값에서 출발할 때 모두 B의 농도값 $[X]=\dfrac{p-bcq}{acq}$로 접근한다.