

◇ 자연

【문제 1】

문제 1-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

일반적으로 공장에서 사용하는 장비는 시간이 지날수록 운영유지비가 증가하므로 적당한 때에 교체하는 것이 경제적이다. 장비의 교체시기를 결정할 때 고려해야 하는 비용에는 장비의 초기투자비와 운영유지비가 있다. 초기투자비는 장비를 처음 도입하는데 사용되는 비용을 말하고, 운영유지비는 장비를 운영하고 유지·보수하는데 드는 각종 비용을 의미한다. 장비를 오래 사용할수록 연평균 초기투자비는 낮아지지만, 장비의 노후화로 인해 연평균 운영유지비는 해가 갈수록 증가한다. 여기서 연평균 비용은 장비의 도입 시점을 포함하여 사용기간 x 년 동안 발생하는 비용을 x 로 나눈 것이다. 이때 x 는 양의 실수이다. 장비의 연평균 총비용은 연평균 초기투자비와 연평균 운영유지비의 합이며, 연평균 총비용을 최소화하는 장비의 수명을 경제수명이라 한다.

어떤 장비의 초기투자비는 20이고, x 년 동안 발생하는 운영유지비는 $\int_0^x f(t)dt$ 이다. 여기서

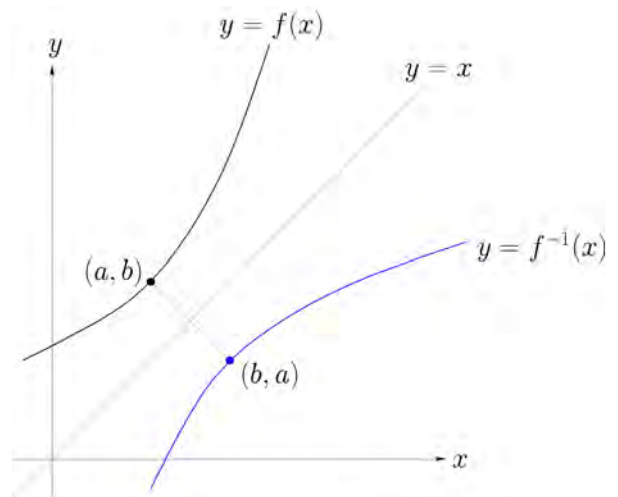
$$f(t) = \begin{cases} 6t & (t \leq 2) \\ 3t^2 & (t > 2) \end{cases}$$

일 때 다음 물음에 답하시오.

- (1) 이 장비를 x 년 동안 사용할 때의 연평균 총비용 $S(x)$ 를 구하시오.
- (2) 이 장비의 연평균 총비용 함수 $S(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분가능성에 대해 논하시오.
- (3) 이 장비의 경제수명을 구하시오.

문제 1-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 사이의 관계는 다음과 같이 설명할 수 있다. 점 (a,b) 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 한 점이면 $b=f(a)$ 이다. 역함수의 정의로부터 $a=f^{-1}(b)$ 이므로, 점 (b,a) 는 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위에 있다. 점 (a,b) 와 점 (b,a) 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로, <그림 1>과 같이 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭인 위치에 놓여있음을 알 수 있다.



<그림 1>

- (1) 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_2^x \sqrt{3+t^2} dt$ 이고, 그 역함수 $g(x) = f^{-1}(x)$ 라고 할 때, 미분계수 $g'(0)$ 을 구하시오.
- (2) 수직선 위를 움직이는 점 P 에 대하여 임의의 위치 s 에서 속도 v 를 측정하여

$$v = \frac{ds}{dt} = s^2 - 1, \quad 2 \leq s \leq 3$$

의 결과를 얻었다. 시각 $t=0$ 일 때 위치 $s=2$ 인 점 P 가 $s=3$ 에 도달하는 시각 T 를 구하시오.

【문제 2】

문제 2-A 다음 문제에 답하시오. (20점)

- (1) 이진수는 각 자리가 0 또는 1로 표현된다. 디지털 파일은 하드디스크에 이진수로 저장되는데, 한 자리의 저장 공간을 1비트라 한다. 또한 8비트를 묶어서 1바이트라 한다. 예를 들어 8자리의 이진수 10111101을 하드디스크에 저장하기 위해서는 8비트, 즉 1바이트의 공간이 필요하다. 한편 생물의 DNA는 4가지의 염기가 연결되어 만들어지며, 이들의 연결 순서에 유전 정보가 담겨 있다. 어떤 생물의 DNA 한 가닥이 4×10^9 개의 염기로 이루어져 있다고 할 때, 염기들의 순서를 하드디스크에 기록한다면 최소한 몇 바이트의 저장 공간이 필요한지 설명하시오. (DNA는 두 가닥이 이중나선을 이루지만 두 가닥은 정보가 중복되므로 한 가닥만 고려하여야 한다.)
- (2) 단백질은 DNA의 유전정보에 따라 아미노산이 연결된 사슬이다. 아미노산은 20가지가 있는데 DNA를 이루는 염기는 4가지 밖에 없으므로, 아미노산을 구별하여 DNA에 기록하기 위해서는 인접한 일정 수의 염기 n 개를 묶어 아미노산 하나에 대응시켜야 한다. 이때 n 은 최소 얼마가 되어야 하는지 설명하시오. 또한 아미노산 300개로 이루어진 단백질의 아미노산 연결 순서를 기록하려면 DNA는 최소 몇 개의 염기로 이루어져 있어야 하는지 설명하시오.

문제 2-B 다음 제시문을 읽고 아래 문제에 답하시오. (30점)

DNA에 쓰여 있는 유전정보는 RNA로 전사되고, 이 정보에 따라 단백질이 합성된다. 합성된 단백질이 DNA를 제어하여 스스로의 합성 과정을 조절하기도 한다. 이런 단백질의 하나인 X의 농도를 $[X]$, 해당되는 RNA R의 농도를 $[R]$ 이라 하자. $[R]$ 의 시간에 대한 순간변화율은 $\frac{[X]}{a[X]+b} - c[R]$ 인데, 여기서 $\frac{[X]}{a[X]+b}$ 는 X가 DNA를 제어하여 R을 합성하는 속도이고 $c[R]$ 은 R이 분해되는 속도이다. 한편 $[X]$ 의 시간에 대한 순간변화율은 $p[R] - q[X]$ 인데, 여기서 $p[R]$ 은 R로부터 X가 합성되는 속도이고 $q[X]$ 는 X가 분해되는 속도이다. 단 a, b, c, p, q 는 모두 양의 상수이다.

- (1) R과 X의 합성과 분해가 균형을 이루면, 농도 $[R]$ 과 $[X]$ 의 순간변화율이 동시에 0이 되어서 $[R]$ 과 $[X]$ 가 모두 시간에 따라 변화하지 않게 된다. 이때의 단백질 농도 $[X]$ 를 구하시오.
- (2) $[R] = \frac{[X]}{c(a[X]+b)}$ 일 때는, $[X]$ 의 순간변화율은 $f([X]) - g([X])$ 의 형태로 표현된다. 여기서 $f([X])$ 는 합성속도, $g([X])$ 는 분해속도를 나타낸다. 합성속도와 분해속도가 같아지는 농도가 둘 이상인 경우에 대해 $y=f([X])$ 의 그래프와 $y=g([X])$ 의 그래프를 함께 그린 후 (1)에서 구한 풀이에 해당되는 점을 그래프 위에 표시하시오.
- (3) 시간에 따라 농도가 변하지 않는 상태를 농도의 정상상태라 한다. (2)에서 그래프에 표시한 각 점이 이러한 정상상태에 해당된다. $[X]$ 의 순간변화율이 (2)에서 구한 $f([X]) - g([X])$ 라 가정하자. $[X]$ 의 값이 (2)에서 그래프에 표시한 점에 해당되는 농도와 조금 차이가 난다면, $[X]$ 가 궁극적으로 어떤 값으로 접근하게 될 것인가? 각 점에 대해 이를 논하시오.