문제 2

■ 예시답안

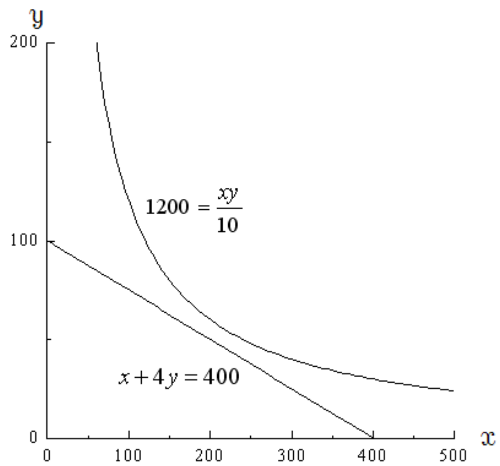
(1) 효용이 1200일 때 무차별곡선은 $1200 = \frac{xy}{10}$, 즉 $y = \frac{12000}{x}$이다.

예산선은 $10000 \times x + 40000 \times y = 4000000$, 즉 $x + 4y = 400$이다.

- x와 y는 0 이상이므로 좌표평면의 1사분면에 그래프가 표시된다.

- $y = \frac{12000}{x}$와 $x + 4y = 400$이 어느 점에서 서로 만나는지 알아보기 위해 두 방정식을 연립하면, $xy = 12000$에 $x = 400 - 4y$를 대입하여 $(400 - 4y)y = 12000$, 즉 $y^2 - 100y + 3000 = 0$을 얻는다.

- 이차방정식의 판별식 $D = 100^2 - 4 \times 1 \times 3000 = -2000 < 0$ 이므로 허근을 갖는다. 그러므로 예산선과 무차별곡선은 서로 만나지 않으며, 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



- 위 그래프에서 보는 것처럼 예산선과 무차별곡선이 만나지 않는다. 따라서 주어진 예산한도 내에서는 1200이라는 효용을 달성할 수 없다.

(2) (1)에서 확인한 것처럼 1200의 효용을 달성할 수 없으므로 주어진 예산한도 내에서는 1200보다 낮은 수준으로 무차별곡선을 이동해서 예산선과 무차별곡선이 만나도록 해야 한다. 무차별곡선을 점점 아래로 이동해 가다가 무차별곡선과 예산선이 접하는 경우에 효용이 극대화된다. 접하는 경우보다 큰 효용은 달성할 수 없고, 더 아래로 이동할 이유는 없기 때

문이다(접하는 경우보다 더 낮은 효용을 얻음).

무차별곡선과 예산선이 접하는 조건의 x, y 값과 그 때의 효용을 구하면 된다.

방법 1) – 판별식 이용

효용이 U일 때의 무차별곡선 $U=\dfrac{xy}{10}$에 $x=400-4y$를 대입하면 $(400-4y)y=10U$,

즉 $2y^2-200y+5U=0$이 된다.

위 이차방정식의 판별식 $D=200^2-4\times2\times5U=0$

$$40000-40U=0$$

$$U=1000$$

이때 $y=\dfrac{200}{4}=50$이고, $x=200$이다.

다시 말해 주어진 예산한도 내에서 국내여행에 보낸 시간이 200이고 해외여행에 보낸 시간이 50일 때 효용이 1000으로 극대화 된다.

방법 2) – 미분 이용

무차별곡선 $y=\dfrac{10U}{x}$과 예산선 $x+4y=400$이 접하므로 접점 (x, y)에서의 무차별곡선의 접선 기울기와 예산선의 기울기가 같다.

무차별곡선의 일차미분함수는 다음과 같다.

$y'=-\dfrac{10U}{x^2}$이므로, $-\dfrac{10U}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$

$10U=xy$이므로 이를 대입하면 $-\dfrac{xy}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$, 즉 $x=4y$가 된다.

이를 $x+4y=400$에 대입하면 $8y=400$, 즉, $y=50$이 된다.

따라서 $x=200$이고, 이때의 효용 $U=\dfrac{200\times50}{10}=1000$이다.

다시 말해 주어진 예산한도 내에서 국내여행에 보낸 시간이 200이고 해외여행에 보낸 시간이 50일 때 효용이 1000으로 극대화 된다.

풀이 3) – 산술평균과 기하평균의 관계 이용

산술평균과 기하평균의 관계에 의하면,

$\frac{x+4y}{2} \geq \sqrt{4xy}$ 이다.

$x+4y=400$이고, $U=\frac{xy}{10}$이므로, $200 \geq \sqrt{40U}$ 즉, $40000 \geq 40U$이다.

따라서 $1000 \geq U$이며, $x=4y$일 때 $U=1000$으로 최대가 된다. 이때 $x+4y=400$이므로 $x=200$, $y=50$이다.
다시 말해 주어진 예산한도 내에서 국내여행에 보낸 시간이 200이고 해외여행에 보낸 시간이 50일 때 효용이 1000으로 극대화 된다.

【문제2】

(1) 1200의 효용을 얻는 x, y의 상품 조합 표

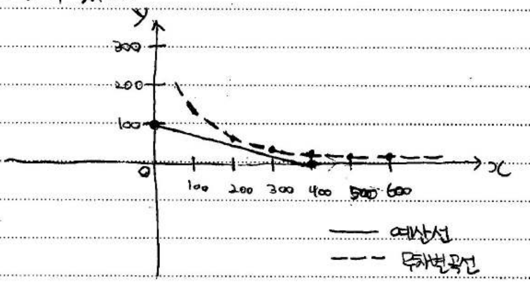
국내여행에 보낸시간	100	200	300	400	500	600
해외여행에 보낸시간	120	60	40	30	24	12

예산선의 조건식을 구하면 국내여행에 시간당 1만원 해외여행에 4만원의 여행경비가 소모된다. 4백만원에 예산한도에 맞추어 조건식을 구한다. x는 국내여행에 보낸시간을, y는 해외여행에 보낸 시간이라 한다.

$$x \times 10000 + y \times 40000 = 4,000,000$$

$\therefore x + 4y = 400$ 이라는 조건식을 구할 수 있다.

위의 표와 식을 이용하여 무차별곡선과 예산선을 그릴 수 있다.



위의 좌표평면에 그려진 예산선과 무차별곡선을 비교하면 예산선이 무차별곡선의 모든 x값에 대해 아래에 있기 때문에 주어진 예산 한도 내에서 1200의 효용을 달성할 수 없다는 결론이 나온다.

(2) 예산선의 조건식을 이용하여 x를 y에 대한 식으로 바꾼 뒤 효용함수 식에 대입하여 극대화하는 여행 시간 x, y를 구한다.

$$x = 400 - 4y \xrightarrow{\text{대입}} \frac{xy}{10} = \frac{(400-4y)y}{10}$$

$$= -\frac{2}{5}(y-50)^2 + 1000$$

$\therefore y = 50$일 때 최대값 1000을 갖는다.

위의 식을 통해 국내여행 시간이 200시간, 해외여행 시간이 50시간일 때, 극대화된 효용값 1000을 갖는다.

【문제2】

(1) 1200의 효용을 얻는 경우이므로 $\frac{xy}{10} = 1200$ ㉠

식이 성립한다.

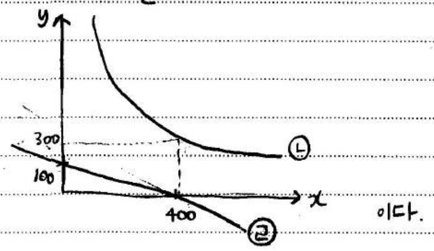
㉠식을 변형하면 $y = \frac{12,000}{x}$ ㉡의 무차별곡선 식이 성립하게 된다.

그리고 A의 예산 한도가 4,000,000원이므로

$4,000,000 = 10,000x + 40,000y$ ㉢ 식이 성립한다.

㉢식을 변형하면 $y = -\frac{1}{4}x + 100$ ㉣의 예산선의 식을 얻을 수 있다.

㉡, ㉣의 그래프를 그리면



이다.

㉡과 ㉣의 그래프가 만나지 않으므로 주어진 예산 한도 내에서 효용 1200을 달성할 수 없다.

(2) 효용함수가 $\frac{xy}{10}$ ① 이고 예산선함수는 $x+4y=400$ ② 이다.

②에 따라 $x = 400 - 4y$ ③ 식이 얻어진다,

③을 ①에 대입하면,

$-\frac{2}{5}y^2 + 40y$ ④ 식이 얻어진다.

극대값을 구하기 위해 ④식을 미분하면

$-\frac{4}{5}y + 40$ ⑤ 이다. 극대값은 ⑤ = 0 이어야 하므로

$-\frac{4}{5}y + 40 = 0$ 이다.

$\therefore y = 50,\ x = 200$이 나오므로

효용을 극대화하는 국내여행 시간은 200시간, 해외여행시간은 50시간 이다,

이때의 효용은 x, y를 ①에 대입하면 1000의 효용값이 나온다.

【문제2】

1) $U(x,y)=\frac{xy}{10}$ 이므로 효용이 1200 일 때,
$xy=12000$ 이 된다 이 식을 만족하는 소비 시간 조합 표를 나타내면 다음과 같다

국내 여행시간 (x)	[illegible]	12	100	300	600	1000	0
해외 여행시간 (y)	[illegible]	1000	120	40	20	12	0

(이때, x나 y는 0이 될 수 없다)

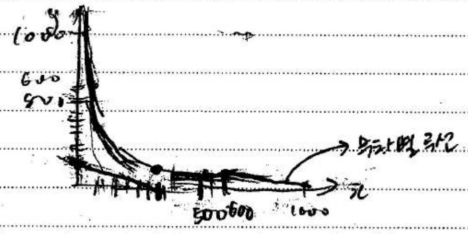
또, 예산과 소비의 관계식을 세우면 다음과 같다

$4{,}000{,}000=10000x+40{,}000y$.

약분하여 정리하면

$400=x+4y$.

표와 관계식을 이용하여 무차별곡선과 예산선을 그리면

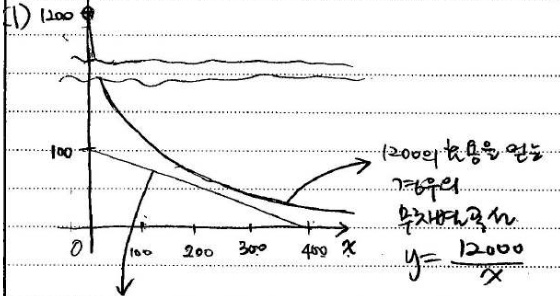


위 그래프에서 보듯이 예산선과 무차별곡선은 만나지 않는다. 따라서 예산선을 만족하며 1200의 효용을 얻을 수는 없다

2) $U(x,y)=\frac{xy}{10}$ 이므로 x와 y의 값이 커야 효용도 커진다. 하지만, 예산 한도가 있다.
이경우 상대적으로 값이 싼 국내여행의 시간이 커야 한도내 가장 큰 효용을 볼 수 있다. 즉,
$400=x+4y$ 와 $U=\frac{xy}{10}$ 에서 x가 최댓값을 가질 때 최대 효용을 누린다. 위 두식을 연립하면
$U=\frac{(100-\frac{1}{4}x)x}{10}$ 이 된다
즉, $U=10x-\frac{1}{40}x^2$
위식을 미분해 보면,
$U'=10-\frac{1}{20}x$ (단, $x\neq0$)
이때 x는 200일때 극댓값이자 최소값을 갖는다
$400=x+4y$ 에 $x=200$을 대입하면
$y=50$
$x=200$, $y=50$을 효용 함수에 대입하면
$U=\frac{200\times50}{10}=1000$
즉, 국내여행시간 200시간,
해외여행시간 50시간 일때
최대 효용 1000을 얻는다

【문제2】

(1)



→ 두개의 그래프는 어느점에서도 만나지 않으므로 회사원 A가 주어진 예산한도 내에서 효용 1200을 달성할 수는 없다

(2) $y=-\frac{1}{4}x+100$ 일때 xy의 최대값.

$$x\left(-\frac{1}{4}x+100\right)$$
$$=-\frac{1}{4}x^2+100x=-\frac{1}{4}(x^2-400x)$$
$$=-\frac{1}{4}(x^2-400x+40000-40000)$$
$$=-\frac{1}{4}(x^2-400x+40000)+10000$$
$$=-\frac{1}{4}(x-200)^2+10000$$

$x=200$ 일때 xy의 최대값 $=10000$

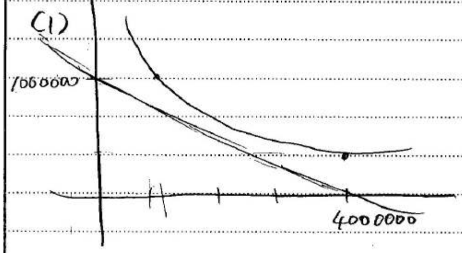
$xy=200y=10000$ $\therefore y=50$

⇒ 국내 여행 시간 $(x)=\boxed{200 \text{ 시간}}$
해외 여행 시간 $(y)=\boxed{50 \text{ 시간}}$

효용 : $U(200,50)=\frac{1000\cancel{0}}{1\cancel{0}}=\boxed{1000}$

【문제2】

(1)



회사원 A의 예산선은
$10000x + 40000y = 4000000$ 이다. -①
효용이 1200 이라면 $1200 = \frac{xy}{10}$ 이고
$xy = 12000$ $y = \frac{12000}{x}$ 그래프를
얻을수 있다. 이 두그래프를 이용해서
$10000x + \frac{48000000}{x} = 4000000$
$x + \frac{48000}{x} = 400$
$x^2 - 400x + 48000$
$D = b'^2 - ac = 40000 - 48000 = -8000 < 0$
이므로 두 그래프는 접하지 않는다. 따라서
효용1200을 달성할 수 없다
(2) 효용을 극대화 하려면 xy가 최대값
이어야 한다. ①번 식을 이용하면
$10000x + 40000y \geq 2\sqrt{4 \times 10^8 xy}$
$4000000 \geq 40000\sqrt{xy}$
$100 \geq \sqrt{xy}$ xy의 최대값은 10000이다.
따라서 $xy = 10000$ 이고 ①식을
간단히 하면 $x + 4y = 400$ 이다.
두식을 연결해 해를 구하면
$x = 200$ $y = 50$ 이다.
따라서 국내여행시간은 200시간,
해외여행 시간은 50시간이다.
이때의 효용은 $U(x, y) = \frac{10000}{10} = 1000$
이므로 1000 이다.

문제 3

■ 예시답안

(1) 담수어는 삼투현상에 의해 물이 체외로부터 들어오므로 수분이 많은 상태가 된다. 따라서 입으로는 그리 많은 양의 물을 흡입할 필요가 없다. 또한 체내로 들어오는 물의 염분 농도가 체내 염분 농도보다 낮기 때문에 매우 묽은 농도의 오줌을 다량 방출해야만 체내 염분 농도의 항상성을 유지할 수 있다.

반대로 해수어의 경우에는 삼투현상에 의해 물이 체외로 빠져 나가서 수분이 부족한 상태가 되기 때문에 이를 보충하기 위해서는 입으로 많은 양의 물을 흡입할 필요가 있다. 하지만 흡입하는 물은 염분 농도가 체내보다 높은 상태이기 때문에 매우 진한 농도의 오줌을 소량 방출해야만 체내 염분 농도의 항상성을 유지할 수 있다.

이를 정리하면 다음과 같다.

	담수어	해수어
염분의 농도	체액>담수	체액<해수
삼투현상에 의한 물의 이동	체내 ← 외부	체내 → 외부
①입을 통한 물의 흡입량	적음	많음
②오줌의 양	많음	적음
③염분의 농도	낮음	높음

(2) 일정시간 동안 체내로 들어오는 물과 오줌에 의해 밖으로 나가는 물의 양(X)은 같아야 한다. 따라서 체내의 일정 염분 농도를 유지하기 위해서는 체내로 들어오는 염분의 양과 나가는 염분의 양이 같아야 한다.

체내로 들어는 염분의 양 = $\frac{4}{5}X \cdot \frac{1}{100}$ 오줌 안의 염분의 양 = $X \cdot a$

$$\therefore a = \frac{4}{500} \text{ 또는 } 0.8\%$$

(3) 담수어가 염분 농도가 높은 해수에 들어가면 담수에서와는 반대로 체내에서 체외로 수분이 이동하는 삼투현상이 일어난다. 이러한 상태에서도 담수에서와 같이 물을 조금만 흡입하고, 농도가 낮은 오줌을 많이 배출하면 결국 체내의 물의 양이 급격히 낮아지고 이에 따라 염분의 농도는 높아져서 결국 세포가 찌그러지면서 죽게 된다.

반대로 해수어를 담수에 넣으면 삼투현상에 의해 물이 체내로 들어오는데, 물은 많이 흡수하고 농도가 높은 오줌을 소량 배출하면 체내의 물의 양이 급격히 높아지고 이에 따라 염분의 농도는 낮아져서 결국 세포가 터지면서 죽게 된다.

	체외의 염분 농도	물의 이동 / 세포의 변화
담수어가 해수로 들어갔을 때	높아짐	체내의 물이 빠져나감 / 세포가 찌그러짐
해수어가 담수로 들어갔을 때	낮아짐	체내로 물이 들어옴 / 세포가 터짐

【문제3】 (1)

담수어는 체내로 물이 들어오기 때문에 체내의 물의 양을 작게 해야 한다. 그러므로 입으로 흡입하는 물의 양은 작게하고 체외로 배설하는 오줌의 양을 많게 하며 체내의 수분량을 줄인다. 또한 염분의 농도를 줄여 삼투 현상에 의한 물 흡수를 감소시키기 위해서는 오줌의 염분 농도를 높게 조절해야 한다.

반대로 해수어는 체외로 물이 빠져나가기 때문에 입으로 흡입하는 물의 양은 많고, 체외로 배설하는 오줌의 양은 적다. 삼투 현상에 의한 물 흡수를 증가시키기 위해 오줌의 염분 농도는 작게 조절한다.

(2) 담수어의 체내 물의 양을 100g이라 하자. 이 때 염분의 양은 1.5g 이다. 담수의 염분 농도가 1%이기 때문에 체내 염분 농도를 1%로 낮추려는 삼투 현상이 일어난다. 이러한 삼투현상에 의해

$$\frac{15}{1000+x} = \frac{1}{100} \quad \therefore x = 500g.$$

삼투 현상에 의해 들어오는 물은 500g이 되고 이는 물 흡수량의 20% 이므로 나머지 입으로 들어오는 80% 물의 양은 2000g이 된다.

그러므로 이때의 담수어의 체내 염분 농도는

$$\frac{21.5}{2600} = \text{약 } 0.008\% \text{ 이다.}$$

때문에 배출해야할 염분 농도는 1.492%이다.

(3) 담수어를 해수에 넣으면 담수에서 물의 흡수량이 많던 담수어의 조절기구는 해수의 높은 염분 농도로 삼투 현상이 적게 일어나는 것에 적응하지 못할 것이다. 그러므로 조절기구에 의해 배출하는 물의 양이 많고 입으로 흡수하는 양이 적어 수분 양은 줄어들고 이에 따라 염분 농도는 높아질 것이다.

이와 반대로 해수어는 조절기구에 의해 배출하는 물의 양이 적기 때문에 반대로 작용한다.

【문제3】

(1) 물고기는 최대한 염분의 농도를 비슷하게 유지하기 위해 노력을 한다.

	담수어	해수어
①	적게 흡입	많이 흡입
②	대량 배설	소량 배설.
③	저농도	고농도

(①: 입으로 흡입하는 물의 양, ②: 체외로 배설하는 오줌의 양, ③: 오줌의 염분농도)

(2) 삼투현상으로 인해 들어오는 물 20%는 무조건 들어오는 양이므로 물고기의 체내염분농도가 20% 만큼 감소해 1.2%가 된다. 항상성을 유지하기 위해 체내염분농도를 1.5%로 조절해야 한다.

그러기 위해선 체외로 배설하는 오줌의 양을 많게, 오줌의 농도를 저농도로 해서 배설해야 한다.

또한 입으로 흡입하는 물의 양을 줄여야한다.

오줌의 염분농도는 약 0.1% 정도로 배설해야한다.

(3) 담수어를 염분이 높은 해수에 넣으면 체내에서 물이 빠져나오고 조절기구가 적응을 못해서 원래 환경에서 했던 것처럼 작용해 체내수분량은 급격히 감소하고 염분의 농도는 높아져서 죽게 된다.

해수어를 염분이 낮은 담수에 넣으면 체내로 물이 들어가고 역시 조절 기구가 적응을 못해 체내수분량은 증가하고 염분의 농도는 낮아져서 죽게 된다.

【문제3】

(1) 담수어는 모든 생명 활동이 멈추기 있을 때 삼투현상에 의해 담수가 체내로 유입된다. 반면, 해수어는 물이 해수로 빠져나간다. 따라서, 담수어는 항상성 유지를 위해 체내로 유입되는 물은 줄이고, 내보내는 물은 많이 하고, 해수어는 반대로 할 것이다.

즉, 담수어는 입으로 흡입하는 물의 양을 줄이고, 체외로 배설하는 오줌의 양을 늘린다. 또, 배출되는 물의 양이 많으므로 오줌의 염분 농도는 낮다."

반면, 해수어는 입으로 흡입하는 물의 양을 많이 하고, 배설하는 오줌 양을 줄여 체내 삼투압을 유지하며 배출하는 물의 양이 적으므로 상대적으로 오줌의 염분 농도는 높다.

(2) 담수어의 체내 염분 농도가 1.5%, 담수의 염분 농도가 1%이므로 담수에서 체내로 삼투가 일어난다. 이때, 삼투로 이동된 물을 x라 하면, x의 4배 만큼의 물이 입으로 들어온다. 즉, 체내로 들어온 물은 $x+4x=5x$이고 이때, 입으로 물을 마시면 1%의 염분도 같이 유입된다.
즉, 삼투나 입을 통해 유입된 염분의 농도는

$$\frac{\cancel{4x}\times 100}{x+4x}\times 100 = 0.8\%$$

들어온 만큼 배출시키면 항상성이 유지되므로 오줌의 염분 농도는 0.8%이다.

(3) 담수어를 해수에 넣으면 체외의 농도가 너무 높아서 담수어의 체내 물이 빠른 속도로 삼투에 의해 이동한다. 이 경우, 체내 수분량이 급격히 감소하고, 염분의 농도가 높아져 담수어가 사망한다.
해수어를 담수에 넣으면, 체외의 농도가 너무 낮아 삼투로 인해 물이 해수어 쪽으로 이동한다. 이 경우에는 체내의 수분량이 급증하고, 염분 농도가 낮아질 뿐 더러 세포내의 삼투로 인해 헤모글로빈이 터지고 만다. 결국, 담수에 들어간 해수어는 항상성 조절 실패와 산소 부족으로 죽게 된다.

【문제3】

(1) "담수어는 담수보다 체내 염분 농도가 높"으므로 담수가 담수어의 체내로 들어오게 된다. 이런 외부의 상황에서 항상성을 유지하기 위해 담수어는 ①입으로 흡입하는 물의 양을 줄이고, ②체외로 배설하는 오줌의 양은 늘린다. 따라서 ③오줌의 염분 농도는 낮아진다.

반면, "해수어는 해수보다 체내 염분 농도가 낮"으므로 해수가 해수어의 체내에서 빠져나가게 된다. 이런 외부의 상황에서 항상성을 유지하기 위해 해수어는 ①입으로 흡입하는 물의 양을 늘리고, ② 체외로 배설하는 오줌의 양은 줄인다. 따라서 오줌의 염분 농도는 높아진다.

(2)

	체내(g)	외부(g)
소금물	100	100
물	98.5	99
소금	1.5	1

$99:1=98.5+x:1.5$

$98.5+x=148.5$

$\therefore x=50(g)$ → 체내로 들어오는 물의 양

$50g \begin{cases} 10g(\text{삼투}) \\ 40g(\text{입으로}) \rightarrow \text{소금은 } 0.4g \text{ (물 40g의 1\%)} \end{cases}$

〈체내 변화〉
소금물 150.4 g
물 (98.5+50)g
소금 (1.5+0.4)g

→ 체외로 배출해야 하는 것: 물 50g, 소금 0.4g

∴ 오줌의 염분 농도

$$=\frac{0.4}{50.4}\times 100 = \frac{400}{504} \fallingdotseq \boxed{0.8\%}$$

(3) 담수어는 본래 항상성을 유지하기 위해 체내의 물을 밖으로 빼내는 조절작용을 하면서 살아간다. 이런 담수어를 해수에 넣으면 갑자기 높아진 물의 염분 농도때문에 체내 수분을 너무 많이 빼앗겨 체내수분의 양은 급격히 줄어들고 체내 염분의 농도는 높아진다.

반대로 해수어는 항상성 유지를 위해 체내로 물을 흡수하는 조절작용을 하는데 염분농도가 낮은 담수에 갑자기 넣어졌을 경우 체내로 너무 많은 물이 흡수되어 체내 수분의 양은 늘어나고 체내 염분의 농도는 낮아진다.

【문제3】

(1) 담수어는 삼투압으로 물이 체내에 들어오므로 상대적으로 물을 적게 마시며 마신물에 비해 오줌의 양이 많다. 또한 마신 물에 비해 낮은 농도의 염분을 배출한다. 이와 반대로 해수어는 삼투압으로 물이 체내에서 나가므로 상대적으로 물을 많이 마시며 마신물에 비해 오줌의 양이 적고 오줌의 염분농도가 높다 이는 체내의 수분량과 염분농도를 유지하기 위함이다.

(2) 담수의 염분은 1% 담수어의 염분은 1.5% 이다. 담수어 체내의 물이 1000 이라고 가정하고 삼투압으로 200 의 물을 입으로 800의 물을 마신다고 한다. 체내로 들어오는 염분의 양은 8이고 담수어 체내의 염분과 합치면 총 체내 염분은 23이다. 체내 수분양은 일정하므로 오줌으로 1000의 물이 빠진다면 염분의 농도를 유지하기위해 8의 염분이 빠진다. 따라서 배출하는 오줌의 염분농도는 $\frac{8}{1000} = 0.8\%$ 이다.

(3) 담수어를 해수에 넣으면 마시고 내보내는 염분의 농도는 일정한데 들어오는 염분의 농도가 높아서 체내에 염분이 지나치게 쌓여 염분과다로 죽는다. 반대로 해수어를 담수에 넣으면 오줌으로 배출되는 염분농도는 일정한데 들어오는 염분의 농도가 낮아서 체내의 염분이 점점 줄어들어 염분 부족으로 죽는다.