4.

2019학년도 자연계열 해설

[자연계열문항] 제시문

<가>

계수 a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수와의 관계는 다음과 같다.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이제 x에 대한 이차방정식 $x^2-2rx+r^2+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$가 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구해보자. 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=2r$이고 $\alpha\beta=r^2+1$임을 알 수 있다. 그러므로 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2r}{r^2+1}$이다. $\frac{2r}{r^2+1}$이 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하기 위해 $\frac{2r}{r^2+1}=n$ (단, n은 정수)이라고 하자. 먼저 $n=0$인 경우, $r=0$이다. $n\neq 0$인 경우, r에 대한 이차방정식 $nr^2-2r+n=0$을 얻고 이 방정식을 풀면 $r=\frac{2\pm\sqrt{4-4n^2}}{2n}$이다. r이 실수이므로 판별식 $D=4-4n^2\geq 0$이다. 따라서 $-1\leq n\leq 1$이고 $n\neq 0$이므로 $n=-1$ 또는 $n=1$이다. $n=-1$이면 $r=-1$이고, $n=1$이면 $r=1$이다. 그러므로 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$가 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하면 $r=-1, 0, 1$이다.

<나>

주어진 자연수 m에 대하여 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

1) $a_1 = m$

2) $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수}) \end{cases}$

예를 들어 $m = 19$인 경우, 수열 $\{a_n\}$은 $19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, \cdots$이다.

수열 $\{a_n\}$의 정의로부터 각 항은 자연수이다. 또한 제k항이 1인 경우, 그 다음 항들은

$$2, 1, 2, 1, \cdots$$

으로 2와 1이 교대로 반복되어 나타남을 알 수 있다.

위와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k = 1$인 자연수 k가 항상 존재한다는 것을 보이자. $a_n > 2$인 n에 대하여 $a_n > a_{n+2}$이 성립함을 다음과 같이 확인할 수 있다.

a_n이 짝수이면 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$이고, $a_{n+2} \le a_{n+1} + 1$이 성립한다. $a_n > 2$이므로

$$a_{n+2} \le a_{n+1} + 1 = \frac{a_n}{2} + 1 < a_n$$

이다. a_n이 홀수이면 $a_n = 2l + 1$ (l은 자연수)로 쓸 수 있고, $a_{n+1} = 2l + 2$가 짝수이므로

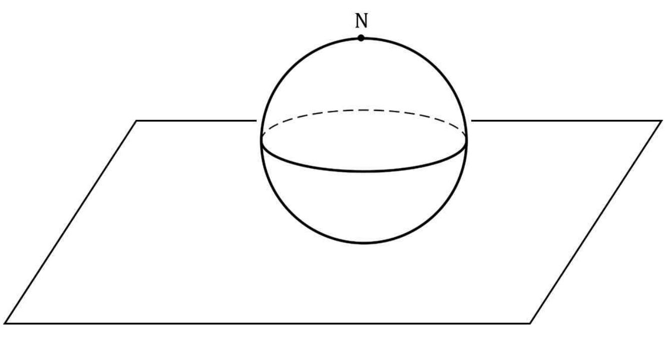
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} = l + 1$$

이 되어 $a_n > a_{n+2}$이다. 그러므로 $a_n > 2$인 n에 대하여 $a_n > a_{n+2}$이다.

지금까지의 논의를 이용하면 $a_k = 1$인 자연수 k가 존재함을 다음과 같이 보일 수 있다. $a_n > 2$인 n에 대하여 $a_n > a_{n+2}$이므로, $a_h \le 2$를 만족시키는 자연수 h가 존재한다. $a_h = 1$인 경우 $k = h$로 하고, $a_h = 2$인 경우 $k = h + 1$로 하면 $a_k = 1$이다.

<다>

투명한 둥근 공이 평평한 바닥에 놓여있다. <그림 1>과 같이 공 위의 점 N에 광원이 있고, 개미 한 마리가 공 위를 기어 다니고 있다. 개미의 움직임과 바닥에 생기는 그림자의 움직임의 관계를 수학적으로 살펴보자.



<그림 1>

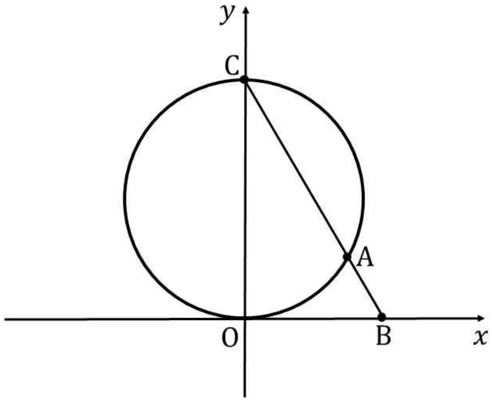
이 문제를 <그림 2>와 같이 좌표평면 위에서 단순화할 수 있다. 먼저 반지름의 길이가 1이고 중심이 $(0, 1)$인 원

$$x^2+(y-1)^2=1$$

을 생각하자. 원 위의 점 $\mathrm{C}(0, 2)$에 광원이 있다. 만약 원 위의 점 A가 점 C에서 출발하여 일정한 속도 v로 시계방향으로 원 위를 움직이면 시각 $t(0<t<\dfrac{\pi}{v})$에서의 점 $\mathrm{A}(x, y)$의 위치는

$$x=\sin(vt), \quad y=1+\cos(vt)$$

이다. 점 A의 그림자는 두 점 C와 A를 잇는 직선과 x축의 교점 B로 주어진다.



<그림 2>

이제 원래의 문제로 돌아가서 <그림 1>을 좌표공간에 수학적으로 나타내어 보자. 반지름의 길이가 1이고 중심이 $(0, 0, 1)$인 구

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

을 생각하자. 점 P는 구와 평면 $z=\dfrac{1}{2}$이 만날 때 생기는 원 위를 움직인다고 가정하자. 점 P의 그림자는 점 $\mathrm{N}(0, 0, 2)$와 점 P를 잇는 직선과 xy평면의 교점 Q로 주어진다.

1-1. 제시문 **<가>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). 이차방정식 $2x^2-2x-3=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 할 때, 점 (α, β)가 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있음을 보이시오.

1-1(b). x에 대한 이차방정식 $x^2-2rx+r^2-r-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{(\alpha-\beta)^2-6}{(\alpha+\beta)^2+3}$이 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하시오.

1-2. 제시문 **<나>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-2(a). $m=2^{2019}-3$일 때, $a_k=1$이 되는 k의 최솟값을 구하시오.

1-2(b). 주어진 자연수 m에 대하여 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$이 있다.

1) $b_1=m$

2) $b_{n+1}=\begin{cases} 2b_n-2 & (b_n\text{이 홀수}) \\ \dfrac{b_n}{2} & (b_n\text{이 짝수}) \end{cases}$

위와 같이 수열 $\{b_n\}$을 정의하면 $b_k=0$인 자연수 k가 존재함을 보이시오. (단, 0은 짝수이다.)

1-3. 제시문 **<다>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). <그림 2>에서 시각 $t=\dfrac{2\pi}{3v}$에서 선분 OB의 길이의 변화율을 구하시오.

1-3(b). 밑줄 친 점 Q가 그리는 도형의 길이를 구하시오.

[자연계열문항] 출제의도와 논제의 구성

제시문 <가>에서는 근과 계수와의 관계 및 이차방정식의 판별식을 활용하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-2rx+r^2+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$가 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하는 방법을 설명한다. 문항 <1-1(a)>에서는 근과 계수와의 관계를 이용할 수 있는 지를 평가한다. 문항 <1-1(b)>에서는 제시문 <가>의 논리 전개를 이해하여 같은 방법을 문제에 적용할 수 있는 지를 평가한다.

제시문 <나>는 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하고 $a_k=1$인 자연수 k가 존재함을 보인다. 문항 <1-2(a)>에서는 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 $a_k=1$인 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있는 지를 평가한다. 문항 <1-2(b)>에서는 제시문 <나>의 논리 전개를 이해하여 같은 방법으로 주어진 명제를 증명할 수 있는 지를 평가한다.

제시문 <다>는 직선과 구의 방정식을 이용하여 구의 한 점에 광원이 있을 때 그림자의 위치를 설명한다. 문항 <1-3(a)>에서는 그림자의 좌표를 구하고 미분법을 사용하여 길이의 변화율을 구할 수 있는 지를 평가한다. 문항 <1-3(b)>에서는 구와 평면이 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이를 구하고 닮음비를 이용하여 원의 그림자의 길이를 구할 수 있는 지를 평가한다.

이차방정식, 수열, 미분, 직선, 평면, 원, 구 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ, 기하와 벡터 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 이차방정식, 수열, 미분, 직선, 평면, 원, 구에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[자연계열문항] 답안 구성요소

■ 각 세부 문항별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문항 <1-1(a)>, <1-1(b)>
1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 근과 계수와의 관계를 올바로 적용한다.
4. <1-1(b)>에서 r에 대한 이차방정식을 구한다.
5. 판별식을 이용하여 실근을 가질 조건을 얻는다.
6. 이차부등식의 해를 구한다.

▶ 문항 <1-2(a)>, <1-2(b)>
1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 귀납적으로 정의된 수열을 이해한다.
4. <1-2(a)>에서 수열의 정의를 이용하여 $a_k=1$이 되는 자연수 k의 최솟값을 구한다.
5. <1-2(b)>에서 $b_n \geq 0$임을 안다.

6. <1-2(b)>에서 제시문의 방법을 적용하여 $b_n > 0$인 n에 대하여 $b_n > b_{n+2}$임을 보이고 $b_k = 0$인 자연수 k가 존재함을 증명한다.

▶ 문항 <1-3(a)>, <1-3(b)>

1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 점 B의 좌표를 구한다.
4. 삼각함수의 미분을 사용하여 선분 OB의 변화율을 계산한다.
5. 점 Q가 그리는 도형이 원임을 파악한다.
6. 닮음비를 이용하여 원의 둘레를 구한다.

[자연계열문항] 모범답안 예시

■ **1-1(a)**

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$임을 알 수 있다. 따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4$$

이다. 그러므로 점 $(\alpha,\ \beta)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있다.

<다른 풀이>

이차방정식 $x^2-x-\dfrac{3}{2}=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$는

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{7}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

이다. 점 $(\alpha,\ \beta)$는 다음과 같이 원의 방정식 $x^2+y^2=4$를 만족시킨다.

$$\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^2=\left(\frac{8-2\sqrt{7}}{4}\right)+\left(\frac{8+2\sqrt{7}}{4}\right)=4$$

■ **1-1(b)**

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=2r$이고 $\alpha\beta=r^2-r-2$임을 알 수 있다. 따라서

$$(\alpha-\beta)^2-6=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta-6=(2r)^2-4(r^2-r-2)-6=4r+2$$

이고 $(\alpha+\beta)^2+3=4r^2+3$이다. 그러므로

$$\frac{(\alpha-\beta)^2-6}{(\alpha+\beta)^2+3}=\frac{4r+2}{4r^2+3}$$

이다. $\dfrac{4r+2}{4r^2+3}$가 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하기 위해 $\dfrac{4r+2}{4r^2+3}=n$ (n은 정수)이라고 하자.

먼저 $n=0$인 경우, $r=-\dfrac{1}{2}$이다. $n\neq 0$인 경우, r에 관한 이차방정식 $4nr^2-4r+3n-2=0$을 얻고 이 방정식을 풀면

$$r=\frac{4\pm\sqrt{16-16n(3n-2)}}{8n}$$

이다. r이 실수이므로 판별식 $D=16-16n(3n-2)\geq 0$이다. 이로부터 $3n^2-2n-1\leq 0$을 구할 수 있고 이를 인수분해하면 $(3n+1)(n-1)\leq 0$이므로 $-\dfrac{1}{3}\leq n\leq 1$이다. $n\neq 0$이므로 $n=1$이다.

$n=1$이면 $r=\dfrac{1}{2}$이다. 그러므로 $\dfrac{(\alpha-\beta)^2-6}{(\alpha+\beta)^2+3}$가 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하면 $r=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}$이다.

■ **1-2(a)**

수열 $\{a_n\}$의 정의에 의하여 $a_1 = 2^{2019} - 3$, $a_2 = a_1 + 1 = 2^{2019} - 2$, $a_3 = \dfrac{a_2}{2} = 2^{2018} - 1$, $a_4 = 2^{2018}$, $a_5 = 2^{2017}$, $a_6 = 2^{2016}$, $a_7 = 2^{2015}$, $\cdots$, $a_{2021} = 2^1$이며 $a_{2022} = 1$이다. 따라서 $a_k = 1$이 되는 자연수 k의 최솟값은 $k = 2022$이다.

■ **1-2(b)**

수열 $\{b_n\}$의 정의로부터 각 항은 0 이상의 정수이다. b_n이 홀수인 경우, $b_{n+1} = 2b_n - 2$이고 이는 짝수이므로 $b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1}}{2} = b_n - 1$이다. 따라서 $b_n > b_{n+2}$이다. 또한 b_n이 짝수인 경우, $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$이고 이 때 b_{n+1}이 짝수이면 (즉, b_n이 4의 배수이면) $b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1}}{2} = \dfrac{b_n}{4}$이고, b_{n+1}이 홀수이면 (즉, b_n이 4의 배수가 아닌 짝수이면) $b_{n+2} = 2b_{n+1} - 2 = b_n - 2$이다. 그러므로 $b_n > 0$인 n에 대하여 $b_n > b_{n+2}$이다. 따라서 $b_k = 0$인 자연수 k가 존재한다.

■ **1-3(a)**

두 점 $\mathrm{C}(0,2)$와 $\mathrm{A}(\sin(vt),\ 1 + \cos(vt))$를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\cos(vt) - 1}{\sin(vt)} x + 2$$

이다. 그러므로 이 직선과 x축의 교점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{2\sin(vt)}{1 - \cos(vt)},\ 0\right)$이고, 시각 t에서 선분 OB의 길이의 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\sin(vt)}{1 - \cos(vt)}\right) = -\frac{2v}{1 - \cos(vt)}$$

따라서 시각 $t = \dfrac{2\pi}{3v}$에서 선분 OB의 길이의 변화율은 $-\dfrac{4v}{3}$이다.

■ **1-3(b)**

평면 $z = \dfrac{1}{2}$과 구 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$이 만날 때 생기는 원의 중심은 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$이다. 이 원의 반지름을 구하기 위해 평면의 방정식 $z = \dfrac{1}{2}$을 구의 방정식에 대입하면

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

이다. 따라서 점 P는 평면 $z = \dfrac{1}{2}$ 위의 중심이 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$이고 반지름이 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$인 원 위를 움직인다. 점 Q는 점 P와 점 $\mathrm{N}(0,\ 0,\ 2)$를 잇는 직선과 xy평면의 교점이므로 점 Q는 중심이 원점인 원을 따라 움직임을 알 수 있다. 그림자의 길이를 구하기 위해 이 원의 반지름 r을 구해보자.

아래의 그림과 같이 닮음비를 이용하면

$$\frac{3}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : r$$

이고 이로부터 $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 그림자의 길이는 $2\pi r=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ 이다.