계 열 문 항

<가>

계수 a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수와의 관계는 다음과 같다.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이제 x에 대한 이차방정식 $x^2-2rx+r^2+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$가 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구해보자. 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=2r$이고 $\alpha\beta=r^2+1$임을 알 수 있다. 그러므로 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2r}{r^2+1}$이다. $\frac{2r}{r^2+1}$이 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하기 위해 $\frac{2r}{r^2+1}=n$ (단, n은 정수)이라고 하자. 먼저 $n=0$인 경우, $r=0$이다. $n\neq 0$인 경우, r에 대한 이차방정식 $nr^2-2r+n=0$을 얻고 이 방정식을 풀면 $r=\frac{2\pm\sqrt{4-4n^2}}{2n}$이다. r이 실수이므로 판별식 $D=4-4n^2\geq 0$이다. 따라서 $-1\leq n\leq 1$이고 $n\neq 0$이므로 $n=-1$ 또는 $n=1$이다. $n=-1$이면 $r=-1$이고, $n=1$이면 $r=1$이다. 그러므로 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$가 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하면 $r=-1, 0, 1$이다.

<나>

주어진 자연수 m에 대하여 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

1) $a_1=m$

2) $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수}) \\ \frac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수}) \end{cases}$

예를 들어 $m=19$인 경우, 수열 $\{a_n\}$은 $19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, \cdots$이다.

수열 $\{a_n\}$의 정의로부터 각 항은 자연수이다. 또한 제k항이 1인 경우, 그 다음 항들은

$$2, 1, 2, 1, \cdots$$

으로 2와 1이 교대로 반복되어 나타남을 알 수 있다.

위와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k=1$인 자연수 k가 항상 존재한다는 것을 보이자. $a_n>2$인 n에 대하여 $a_n>a_{n+2}$이 성립함을 다음과 같이 확인할 수 있다.

a_n이 짝수이면 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$이고, $a_{n+2}\leq a_{n+1}+1$이 성립한다. $a_n>2$이므로

$$a_{n+2}\leq a_{n+1}+1=\frac{a_n}{2}+1<a_n$$

이다. a_n이 홀수이면 $a_n=2l+1$ (l은 자연수)로 쓸 수 있고, $a_{n+1}=2l+2$가 짝수이므로

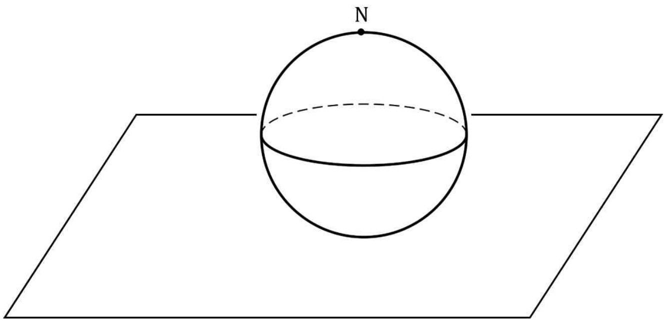
$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{2}=l+1$$

이 되어 $a_n>a_{n+2}$이다. 그러므로 $a_n>2$인 n에 대하여 $a_n>a_{n+2}$이다.

지금까지의 논의를 이용하면 $a_k=1$인 자연수 k가 존재함을 다음과 같이 보일 수 있다. $a_n>2$인 n에 대하여 $a_n>a_{n+2}$이므로, $a_h\leq 2$를 만족시키는 자연수 h가 존재한다. $a_h=1$인 경우 $k=h$로 하고, $a_h=2$인 경우 $k=h+1$로 하면 $a_k=1$이다.

<다>

투명한 둥근 공이 평평한 바닥에 놓여있다. <그림 1>과 같이 공 위의 점 N에 광원이 있고, 개미 한 마리가 공 위를 기어 다니고 있다. 개미의 움직임과 바닥에 생기는 그림자의 움직임의 관계를 수학적으로 살펴보자.



<그림 1>

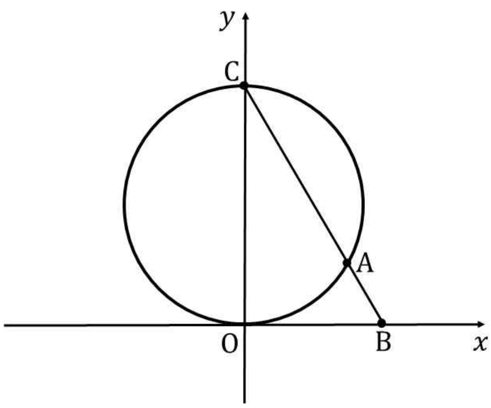
이 문제를 <그림 2>와 같이 좌표평면 위에서 단순화할 수 있다. 먼저 반지름의 길이가 1이고 중심이 $(0, 1)$인 원

$$x^2+(y-1)^2=1$$

을 생각하자. 원 위의 점 C$(0, 2)$에 광원이 있다. 만약 원 위의 점 A가 점 C에서 출발하여 일정한 속도 v로 시계방향으로 원 위를 움직이면 시각 $t\left(0<t<\dfrac{\pi}{v}\right)$에서의 점 A$(x, y)$의 위치는

$$x=\sin(vt), \quad y=1+\cos(vt)$$

이다. 점 A의 그림자는 두 점 C와 A를 잇는 직선과 x축의 교점 B로 주어진다.



<그림 2>

이제 원래의 문제로 돌아가서 <그림 1>을 좌표공간에 수학적으로 나타내어 보자. 반지름의 길이가 1이고 중심이 $(0, 0, 1)$인 구

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

을 생각하자. 점 P는 구와 평면 $z=\dfrac{1}{2}$이 만날 때 생기는 원 위를 움직인다고 가정하자. 점 P의 그림자는 점 N$(0, 0, 2)$와 점 P를 잇는 직선과 xy평면의 교점 Q로 주어진다.

1-1. 제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). 이차방정식 $2x^2-2x-3=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 할 때, 점 (α, β)가 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있음을 보이시오.

1-1(b). x에 대한 이차방정식 $x^2-2rx+r^2-r-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{(\alpha-\beta)^2-6}{(\alpha+\beta)^2+3}$이 정수가 되게 하는 모든 실수 r을 구하시오.

1-2. 제시문 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-2(a). $m=2^{2019}-3$일 때, $a_k=1$이 되는 k의 최솟값을 구하시오.

1-2(b). 주어진 자연수 m에 대하여 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$이 있다.

1) $b_1=m$

2) $b_{n+1}=\begin{cases} 2b_n-2 & (b_n\text{이 홀수}) \\ \dfrac{b_n}{2} & (b_n\text{이 짝수}) \end{cases}$

위와 같이 수열 $\{b_n\}$을 정의하면 $b_k=0$인 자연수 k가 존재함을 보이시오. (단, 0은 짝수이다.)

1-3. 제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). <그림 2>에서 시각 $t=\dfrac{2\pi}{3v}$에서 선분 OB의 길이의 변화율을 구하시오.

1-3(b). 밑줄 친 점 Q가 그리는 도형의 길이를 구하시오.