[숙명여자대학교 문항정보]

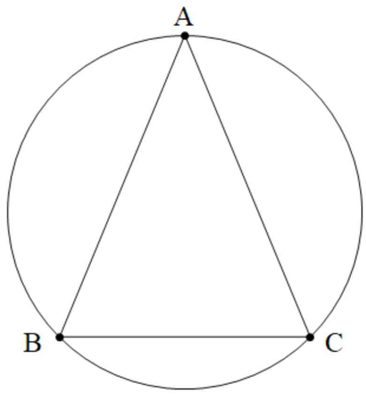
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2019학년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열 / 1-1(a), 1-1(b), 1-2(a), 1-2(b),1-3(a), 1-3(b)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	이차곡선, 접선, 수열, 수학적 귀납법, 도함수, 삼각함수
예상 소요 시간	120분	

2. 문항 및 제시문

<가>

원 위의 세 점이 만드는 삼각형 중 넓이가 최대인 것은 어떤 삼각형인지 알아보자. <그림 1>과 같이 반지름이 1인 원 위에 세 점 A, B, C를 임의로 잡았을 때, 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 조건이 무엇인지 두 단계로 알아보자. 먼저 세 점 중 두 점 B와 C를 고정했을 때 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 나머지 한 점 A는 다음과 같이 구할 수 있다. 삼각형 ABC의 밑변을 선분 BC로 하면 높이는 점 A와 직선 BC 사이의 거리이다. 따라서 점 A가 원 위의 점 중 직선 BC에서 가장 멀리 떨어진 점일 경우에 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 된다. 이때, 삼각형 ABC는 선분 BC를 밑변으로 하는 이등변삼각형이 됨을 확인할 수 있다.



<그림 1>

이제 이등변삼각형 중 넓이가 최대가 되는 경우를 구해보자. 이를 위하여 <그림 2>와 같이 좌표 평면 위에서 점 B와 C를 직선 $y=-k$ (단, $0 \le k < 1$) 위의 점이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 최대로 만드는 점 A는 원 위의 점 중 직선 $y=-k$에 가장 멀리 떨어진 점 $(0,1)$이 된다. 두 점 B와 C는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 좌표는 $(-\sqrt{1-k^2}, -k)$, $(\sqrt{1-k^2}, -k)$이다. 따라서 이때의 삼각형 ABC의 넓이 $S(k)$는

$$S(k)=(1+k)\sqrt{1-k^2}$$

이다. 미분법을 이용하여 $S(k)$가 최댓값을 갖게 하는 k의 값을 구하면 $k=\frac{1}{2}$이다. 따라서 원 위의 세 점이 만드는 삼각형 중 넓이가 최대인 것은 정삼각형이다.

<나>

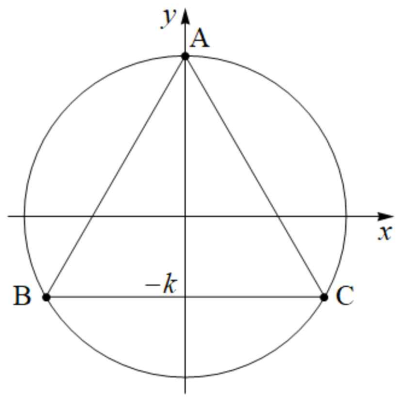
자연수로 이루어진 수열의 임의의 두 항이 서로 소인 경우 (즉, 두 항의 최대공약수가 1인 경우), 이 수열을 서로 소 수열이라고 부르자. 예를 들어

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$$

과 같이 수열의 n번째 항을 n번째 소수로 두면 임의의 두 소수는 서로 소이므로 이 수열은 서로 소 수열이다. 하지만 홀수들의 수열

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$$

을 생각하면 3과 9가 서로 소가 아니므로 이 수열은 서로 소 수열이 아님을 알 수 있다.



<그림 2>

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 n에 대하여 a_n은 홀수임을 보일 수 있다. ①식을 변형하면

$$a_{n+1} - 2 = a_n^2 - 2a_n = a_n(a_n - 2) \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

를 얻는다. 따라서 임의의 두 자연수 n과 m $(n > m)$에 대하여 ②식을 반복하여 적용하면

$$a_n - 2 = a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_m(a_m - 2)$$

이다. 이제 a_n과 a_m의 공약수를 k라 하면, $a_n - a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_m(a_m - 2) = 2$에서 k가 좌변의 약수이므로 k는 2의 약수이어야 한다. 그러나 a_n은 항상 홀수이므로 $k \neq 2$이고 따라서 $k = 1$이다. 즉, a_n과 a_m은 서로 소이다. 그러므로 위와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$은 서로 소 수열이다.

<다>

(I) 곡선 $y = f(x)$가 $x = \alpha$에서 x축에 접하면 다음이 성립한다.

$$f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0$$

(II) 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식 $f(x) = 0$이 중근 α를 가진다면 $f(x)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x) = (x - \alpha)^2 (x - \beta)$$

여기서 β는 또 다른 한 근을 나타낸다.

(III) 다음과 같은 정적분이 성립한다.

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2 (x - \beta)\, dx = -\frac{(\beta - \alpha)^4}{12}$$

1-1. 다음을 구하시오.

1-1(a). 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위에 두 점 $B(0,\,-2)$와 $C(3,0)$이 있다. 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되게 하는 타원 위의 점 A의 좌표를 구하시오.

1-1(b). 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위에 두 점 B와 C가 x축에 평행한 직선 $y=-k$ (단, $0 \le k < 2$) 위에 놓여 있다. 이 타원 위를 움직이는 점 A에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되게 하는 k의 값과 그때의 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

1-2. 아래와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$에 대하여 다음 문제에 답하시오.

$$b_1=2,\, b_{n+1}=b_n^2-3b_n+3 \quad (n=1,2,3,\,\cdots)$$

1-2(a). 임의의 자연수 n에 대하여 b_n이 3의 배수가 아님을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

1-2(b). 수열 $\{b_n\}$은 서로 소 수열임을 증명하시오.

1-3. 함수 $f(x)=x^3+3x^2\cos\theta-4\sin 2\theta$ (단, θ는 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 상수)의 그래프가 x축에 접할 때 다음을 구하시오.

1-3(a). $\sin\theta$의 값을 구하시오.

1-3(b). 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

3. 제시문 요약

<가>
원 위의 세 점이 이루는 삼각형 중 넓이가 최대가 되는 경우는 무엇인지 설명한다. 먼저 두 점을 고정한 후 넓이가 최대가 되는 삼각형은 이등변삼각형이 되고, 이등변삼각형 중 넓이가 최대가 되는 것은 정삼각형이다.

<나>
서로 소 수열을 정의하고 귀납적으로 정의된 수열이 서로 소 수열임을 보인다.

<다>
곡선 $y=f(x)$가 $x=\alpha$에서 x축에 접할 때 $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$이다. 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근 α를 가진다면 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$이다. 여기서 β는 또 다른 한 근을 나타낸다. 또한 다음과 같은 정적분이 성립한다.

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

4. 출제 의도

제시문 <가>에서는 원 위의 세 점이 이루는 삼각형 중 넓이가 최대가 되는 경우는 무엇인지를 두 단계에 걸쳐 설명한다. 첫 번째 단계에서는 두 점을 고정한 후 넓이가 최대가 되는 삼각형은 이등변삼각형이 됨을 보이고, 두 번째 단계에서는 이등변삼각형 중 넓이가 최대가 되는 것은 정삼각형임을 확인한다. <논제 1-1(a)>에서는 제시문 <가>의 첫 번째 단계의 논리 전개를 이해하여 같은 방법으로 타원의 경우에 적용할 수 있는지를 평가한다. <논제 1-1(b)>에서는 제시문 <가>의 두 번째 단계를 이해하고 타원의 경우에 넓이가 최대가 되는 삼각형의 형태를 미분법을 적용하여 구할 수 있는지를 묻는다.
제시문 <나>는 서로 소 수열을 정의하고 귀납적으로 정의된 수열이 서로 소 수열임을 보인다. <논제 1-2(a),(b)>에서는 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제들을 증명할 수 있는지를 보고자 한다.
제시문 <다>는 삼차함수 $f(x)$가 x축과 접할 때 그래프의 개형을 이해하기 위해 고려하여야 할 성질들을 다룬다. 이 때 x^2의 계수와 상수항이 삼각함수로 주어져 있어서 다항식의 연산 능력을 평가하고, 삼각함수의 기본 성질 및 미분, 적분의 관계를 이해하는지 질문한다. <논제 1-3(a)>에서는 즉, $x=\alpha$에서 접한다면 $x=\alpha$에서의 함수값 $f(\alpha)=0$이고 미분값 $f'(\alpha)=0$이라는 사실을 적용할 수 있는지를 묻고 있다. <논제 1-3(b)>에서는 중근 $x=\alpha$를 가지고 삼차방정식 $f(x)=0$의 또 다른 한 근 $x=\beta$를 구할 수 있는지에 대해 그리고 적분을 사용한 넓이의 수리적 이해를 묻는다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 <가>	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면 곡선 - ② 평면곡선의 접선 ① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (1) 평면 곡선 - (가) 이차곡선 기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 <나>	교육과정	[수학Ⅱ] - ㈐ 수열 - ③ 수학적 귀납법 ① 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
제시문 <다>	교육과정	[미적분Ⅰ] - ㈐ 다항함수의 미분법 - ③ 도함수의 활용 ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제 <1-1>	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면 곡선 - ② 평면곡선의 접선 ① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (1) 평면 곡선 - (가) 이차곡선 기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 <1-2>	교육과정	[수학Ⅱ] - ㈐ 수열 - ③ 수학적 귀납법 ③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
문제 <1-3>	교육과정	[미적분Ⅰ] - ㈐ 다항함수의 미분법 - ③ 도함수의 활용 ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – ② 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분Ⅱ] – (4) 적분법 – (라) 정적분의 활용 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8] “수학과 교육과정”

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	류희찬 외	천재교과서	2014	154-163
	수학 II	정상권 외	금성출판사	2016	156-163
	기하와 벡터	류희찬 외	천재교과서	2014	18-21
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	17-22
	미적분 I	황선욱 외	좋은책신사고	2015	109-176
	미적분 I	김창동 외	교학사	2016	110-187
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2016	113-167
	미적분 II	정상권 외	금성출판사	2016	110-198
기타					

6. 문항 해설

수열, 함수, 미분, 적분, 이차곡선 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 기하와 벡터 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 이차곡선, 접선, 함수의 최대 최소, 수열, 수학적 귀납법, 미분, 적분에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

7. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 논제 <1-1(a)>, <1-1(b)>
1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 점 A가 직선 BC와 평행한 직선이 타원에 접하는 점임을 안다.
4. 타원의 접선의 방정식을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.
5. 삼각형의 넓이 $S(k)$를 k에 대한 식으로 바르게 구한다.
6. $S(k)$를 미분하여 최댓값을 갖게 하는 k값과 최댓값을 구한다.

▶ 논제 <1-2(a)>, <1-2(b)>
1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 귀납적으로 정의된 수열을 이해한다.
4. <1-2(a)>에서 수학적 귀납법을 이용하여 b_n이 3의 배수가 아님을 증명한다.
5. <1-2(b)>에서 제시문의 방법을 적용하여 b_n과 b_m의 관계식을 구한다.
6. <1-2(b)>에서 b_n이 서로 소 수열임을 증명한다.

▶ 논제 <1-3(a)>, <1-3(b)>
1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. x축과 접하는 점의 x좌표를 구할 수 있다.
4. 삼차방정식으로부터 $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.
5. 삼차방정식의 중근을 제외한 또 다른 한 근을 구할 수 있다.
6. 둘러싸인 부분의 넓이가 정적분으로 주어짐을 안다.

■ 각 세부 문제별로 다음의 기준으로 채점한다.
1 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 정확하게 충족시키고, 3-6의 요건 중 3가지를 만족하는 경우
4 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하는 경우
5 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하나 논리 전개 및 계산이 다소 미흡한 경우
6 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 1가지를 만족하는 경우
7 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지만, 3-6의 요건을 충족시키지 못한 경우
8 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지 못한 경우
9 등급: 위의 6가지 기준을 대부분 충족시키지 못한 경우

8. 예시 답안

■ 1-1(a)

삼각형 ABC에서 선분 BC를 밑변으로 하였을 때, 높이는 점 A에서 직선 BC까지의 거리가 된다. 따라서 삼각형의 넓이가 최대가 되게 하는 타원 위의 점 A는 직선 BC와 평행한 직선이 타원과 접하는 점 중 직선 BC에서 멀리 떨어진 점이다. 직선 BC의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로, 타원 위의 점 중 접선의 기울기가 $\frac{2}{3}$인 점을 찾으면 된다. 타원 위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식은 $\frac{ax}{9}+\frac{by}{4}=1$이고 접선의 기울기는 $-\frac{4a}{9b}$이다. 따라서 방정식

$$-\frac{4a}{9b}=\frac{2}{3},\ \frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1$$

을 풀면 두 점 $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$를 얻는다. 두 점 중 직선 BC에 더 멀리 떨어진 점은 $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$이다.

■ 1-1(b)

두 점 B, C가 직선 $y=-k$ (단, $0\le k<2$) 위에 놓여있다고 하면, 직선 BC에서 가장 멀리 떨어진 타원 위의 점은 점 $A(0,2)$이다. 두 점 B, C의 좌표는 각각 $\left(-3\sqrt{1-\frac{k^2}{4}},-k\right)$, $\left(3\sqrt{1-\frac{k^2}{4}},-k\right)$이므로 삼각형의 넓이 $S(k)$는

$$S(k) = 3(2+k)\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}$$

이다. 이를 미분하면 $S'(k) = -\dfrac{3(k^2+k-2)}{2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{4}}}$ 이므로 $k=1$일 때, $S(k)$는 최댓값 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ 을 갖는다.

■ 1-2(a)

수학적 귀납법을 이용하여 b_n이 3의 배수가 아님을 증명해 보자.

(i) $n=1$일 때, $b_1=2$이므로 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=k$일 때, b_k가 3의 배수가 아니라고 가정하면 b_k^2도 3의 배수가 아니다.

수열 $\{b_n\}$은 임의의 자연수 n에 대하여 $b_{n+1} = b_n^2 - 3b_n + 3$을 만족시키는 수열이므로

$b_{k+1} = b_k^2 - 3b_k + 3$이다. 이제 위 식을 변형하면

$$b_{k+1} + 3b_k - 3 = b_k^2$$

이다. 여기서 $-3b_k+3$은 3의 배수이고 b_k^2은 3의 배수가 아니므로 b_{k+1}은 3의 배수가 아니다. 왜냐하면, 만일 b_{k+1}이 3의 배수이면 위 식의 좌변은 3의 배수이나 우변은 3의 배수가 아니기 때문이다. 그러므로 등식이 성립하지 않는다. 따라서 $n=k+1$일 때 b_{k+1}은 3의 배수가 아니다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 b_n은 모든 자연수 n에 대하여 3의 배수가 아님을 알 수 있다.

■ 1-2(b)

수열 $\{b_n\}$이 서로 소 수열임을 증명해 보자.

수열 $\{b_n\}$은 $b_1=2$이고 임의의 자연수 n에 대하여 $b_{n+1} = b_n^2 - 3b_n + 3$을 만족한다. 이제 위 식을 변형하면

$$b_{n+1} - 3 = b_n^2 - 3b_n = b_n(b_n - 3) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 따라서 임의의 두 자연수 n과 m $(n > m)$에 대하여 ①식을 반복하여 적용하면

$$b_n - 3 = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_m(b_m - 3)$$

이다. 이제 b_n과 b_m의 공약수를 k라 하면, $b_n - b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_m(b_m-3) = 3$에서 k가 좌변의 약수이므로 k는 3의 약수이어야 한다. 그러나 b_n은 3의 배수가 아니므로 $k \neq 3$이고 따라서 $k=1$이다. 즉, b_n과 b_m은 서로 소이다. 그러므로 위와 같이 정의된 수열 $\{b_n\}$은 서로 소 수열이다.

■ 1-3(a)

$f(x) = x^3 + 3x^2\cos\theta - 4\sin 2\theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 이므로

$f'(x) = 3x^2 + 6x\cos\theta = 3x(x + 2\cos\theta) = 0$이다. 따라서 제시문 <다>의 (I)을 이용하면

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -2\cos\theta$$

에서 x축과 접할 수 있다. 여기서 $f(0) = -4\sin 2\theta < 0$이므로 $x=0$에서 x축과 접할 수 없다. 따라서 $x = -2\cos\theta$에서 x축과 접하기 때문에 제시문 <다>의 (I)을 이용하면 $f(-2\cos\theta) = 0$임을 알 수 있다. 그러므로

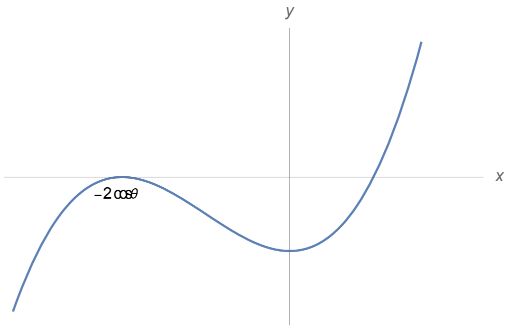
$$\begin{aligned} 0 &= f(-2\cos\theta) \\ &= (-2\cos\theta)^3 + 3(-2\cos\theta)^2\cos\theta - 4\sin 2\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 4\sin 2\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 8\sin\theta\cos\theta \\ &= 4\cos\theta(\cos^2\theta - 2\sin\theta) \\ &= 4\cos\theta(1 - \sin^2\theta - 2\sin\theta) \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos\theta > 0$이므로 $1 - \sin^2\theta - 2\sin\theta = 0$이다. 주어진 θ의 범위에서 $\sin\theta$의 값은 0과 1 사

이에 놓여 있으므로

$$\sin\theta = \sqrt{2} - 1$$

을 얻는다. 그래프의 개형은 다음과 같다.



■ 1-3(b)

제시문 <다>의 (II)에 의해서 $\alpha = -2\cos\theta$에서 x축에 접하기 때문에 또 다른 한 근을 β라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2\cos\theta)^2 (x - \beta) \\ &= (x^2 + 4x\cos\theta + 4\cos^2\theta)(x - \beta) \\ &= x^3 + (4\cos\theta - \beta)x^2 + (4\cos^2\theta - 4\beta\cos\theta)x - 4\beta\cos^2\theta \end{aligned}$$

이다. 또한

$$f(x) = x^3 + 3x^2\cos\theta - 4\sin 2\theta$$

이므로 x^2의 계수를 비교하면 $\beta = \cos\theta$이다.

(x의 계수 또는 상수항을 비교하여도 같은 결론을 얻는다. 다만 상수항끼리 비교하면 $\beta = 2\tan\theta$를 얻고 1-3(a)에서 얻은 $\sin\theta$의 값을 이용하면 $\beta = \cos\theta$임을 알 수 있다.)

따라서 구하는 부분의 넓이는 제시문 <다>의 (III)에서 주어진 정적분을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| &= \left| \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 (x - \beta)\,dx \right| \\ &= \left| \int_{-2\cos\theta}^{\cos\theta} (x + 2\cos\theta)^2 (x - \cos\theta)\,dx \right| \\ &= \frac{1}{12}(3\cos\theta)^4 \\ &= \frac{27}{4}\cos^4\theta \\ &= \frac{27}{4}(1 - \sin^2\theta)^2 \\ &= \frac{27}{4}\{1 - (\sqrt{2} - 1)^2\}^2 \\ &= 27(3 - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$