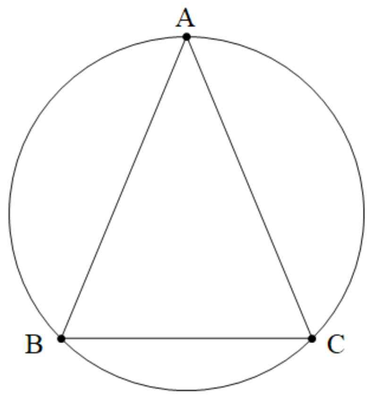
자연계열 문항

<가>

원 위의 세 점이 만드는 삼각형 중 넓이가 최대인 것은 어떤 삼각형인지 알아보자. <그림 1>과 같이 반지름이 1인 원 위에 세 점 A, B, C를 임의로 잡았을 때, 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 조건이 무엇인지 두 단계로 알아보자. 먼저 세 점 중 두 점 B와 C를 고정했을 때 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 나머지 한 점 A는 다음과 같이 구할 수 있다. 삼각형 ABC의 밑변을 선분 BC로 하면 높이는 점 A와 직선 BC 사이의 거리이다. 따라서 점 A가 원 위의 점 중 직선 BC에서 가장 멀리 떨어진 점일 경우에 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 된다. 이때, 삼각형 ABC는 선분 BC를 밑변으로 하는 이등변삼각형이 됨을 확인할 수 있다.

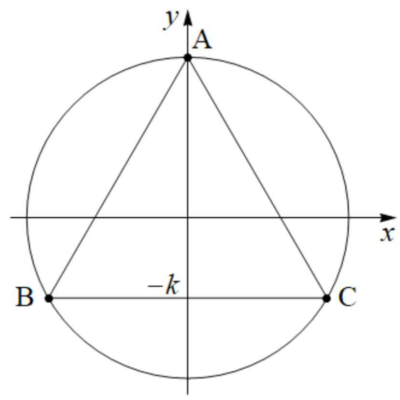


<그림 1>

이제 이등변삼각형 중 넓이가 최대가 되는 경우를 구해보자. 이를 위하여 <그림 2>와 같이 좌표 평면 위에서 점 B와 C를 직선 $y=-k$ (단, $0 \le k < 1$) 위의 점이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 최대로 만드는 점 A는 원 위의 점 중 직선 $y=-k$에 가장 멀리 떨어진 점 $(0,1)$이 된다. 두 점 B와 C는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 좌표는 $(-\sqrt{1-k^2}, -k)$, $(\sqrt{1-k^2}, -k)$이다. 따라서 이 때의 삼각형 ABC의 넓이 $S(k)$는

$$S(k)=(1+k)\sqrt{1-k^2}$$

이다. 미분법을 이용하여 $S(k)$가 최댓값을 갖게 하는 k의 값을 구하면 $k=\dfrac{1}{2}$이다. 따라서 원 위의 세 점이 만드는 삼각형 중 넓이가 최대인 것은 정삼각형이다.



<그림 2>

<나>

자연수로 이루어진 수열의 임의의 두 항이 서로 소인 경우 (즉, 두 항의 최대공약수가 1인 경우), 이 수열을 서로 소 수열이라고 부르자. 예를 들어

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$$

과 같이 수열의 n번째 항을 n번째 소수로 두면 임의의 두 소수는 서로 소이므로 이 수열은 서로 소 수열이다. 하지만 홀수들의 수열

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$$

을 생각하면 3과 9가 서로 소가 아니므로 이 수열은 서로 소 수열이 아님을 알 수 있다.

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 n에 대하여 a_n은 홀수임을 보일 수 있다. ①식을 변형하면

$$a_{n+1} - 2 = a_n^2 - 2a_n = a_n(a_n - 2) \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

를 얻는다. 따라서 임의의 두 자연수 n과 m $(n > m)$에 대하여 ②식을 반복하여 적용하면

$$a_n - 2 = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_m(a_m - 2)$$

이다. 이제 a_n과 a_m의 공약수를 k라 하면, $a_n - a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_m(a_m-2) = 2$에서 k가 좌변의 약수이므로 k는 2의 약수이어야 한다. 그러나 a_n은 항상 홀수이므로 $k \neq 2$이고 따라서 $k = 1$이다. 즉, a_n과 a_m은 서로소이다. 그러므로 위와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$은 서로 소 수열이다.

<다>

(I) 곡선 $y = f(x)$가 $x = \alpha$에서 x축에 접하면 다음이 성립한다.

$$f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0$$

(II) 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식 $f(x) = 0$이 중근 α를 가진다면 $f(x)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$

여기서 β는 또 다른 한 근을 나타낸다.

(III) 다음과 같은 정적분이 성립한다.

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

1-1. 다음을 구하시오.

1-1(a). 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위에 두 점 $B(0,-2)$와 $C(3,0)$이 있다. 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되게 하는 타원 위의 점 A의 좌표를 구하시오.

1-1(b). 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위에 두 점 B와 C가 x축에 평행한 직선 $y=-k$ (단, $0\le k<2$) 위에 놓여 있다. 이 타원 위를 움직이는 점 A에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되게 하는 k의 값과 그때의 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

1-2. 아래와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$에 대하여 다음 문제에 답하시오.

$$b_1=2,\ b_{n+1}=b_n^2-3b_n+3 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

1-2(a). 임의의 자연수 n에 대하여 b_n이 3의 배수가 아님을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

1-2(b). 수열 $\{b_n\}$은 서로 소 수열임을 증명하시오.

1-3. 함수 $f(x)=x^3+3x^2\cos\theta-4\sin 2\theta$ (단, θ는 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$인 상수)의 그래프가 x축에 접할 때 다음을 구하시오.

1-3(a). $\sin\theta$의 값을 구하시오.

1-3(b). 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.