자연계열 계열문항

출제 의도

학생들의 이해 능력, 분석 능력, 그리고 통합적 사고 능력을 평가하기 위하여, 수학의 두개 영역에서 지문을 선정하여 그 주요 내용을 재구성하거나 창작하였다. <가>는 두 점이 원을 시계 반대 방향으로 일정한 속력으로 계속 움직일 때 두 점이 모두 어떤 영역에 동시에 있을 수 있는 지에 대한 두 가지 사고의 과정을 다루고 있다. 한 과정은 한 점의 속력을 1, 다른 한 점의 속력을 v라 했을 때, v의 범위를 나누어 설명하였고, 다른 과정은 시각이 t일 때 두 점이 움직인 거리를 순서쌍 (t, vt)로 좌표 평면에 나타내면 직선 $y = vx$ 위의 한 점이 된다는 사실에 기초하여 직선 $y = vx$가 그 영역과 만나는지를 확인하면 된다는 과정을 설명하였다. <나>는 $x > 0$인 구간에서 정의된 함수 중에서 어떤 두 부등식을 만족하는 함수를 구하는 과정을 다루고 있다.

<논제 2-1>에서는 <가>에서 첫 번째 과정에서의 제시문, 즉 v의 범위를 나누어 설명하는 제시문의 정확한 이해를 바탕으로 사고하도록 유도하였다. <논제 2-2>에서는 좌표평면에서 설명하였던 <가>에서의 두 번째 과정의 정확한 이해를 바탕으로 사고하도록 유도하였다. <논제 2-3>에서는 <나>에서 논의 된 과정을 적용하여 제시문과 다른 두 부등식을 만족하는 함수를 구할 수 있는지를 보고자 하였다.

제시문 요약

<가>

원 위에 두 점이 각각 일정한 속력으로 움직인다고 할 때, 이 두 점이 주어진 호 위에 있을 수 있음을 두 가지 관점에서 설명한다. 첫 번째로 속력의 범위에 따라 여러 경우로 나누어 각각의 경우에 증명할 수 있음을 설명하고 두 번째로 좌표평면을 이용하여 부등식의 영역과 직선이 만나는 문제로 바꾸어 설명한다.

<나>

$x > 0$인 구간에서 정의된 함수 중에서

$$f(xy) \le f(x) + f(y) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$f(x) \le x - 1 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

을 만족하는 함수를 구한다. 이를 위하여 도함수의 정의와 부등식을 이용하여 $f'(x) = \dfrac{1}{x}$임을 증명한다. 이제 적분을 이용하면 $f(x) = \ln x$이다. 한편 $f(x) = \ln x$는 부등식 ①과 ②를 만족한다.

문항 해설

부등식, 함수, 미분, 적분 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 기하와 벡터 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 ‘시각, 속력, 거리’, 연립 부등식의 영역, 이 둘 사이의 관계, 함수의 극한, 미분에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

채점 기준

■ **채점 기준**

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	① 점 P가 점 A에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{1}{3}$이고 이 때 점 Q가 점 O부터 움직인 거리가 $\frac{v}{3}$인 점이라는 사실을 안다.	2
	② $\frac{7}{3} \leq \frac{v}{3} \leq \frac{8}{3}$이므로 점 Q가 원의 둘레를 두 바퀴 회전한 후 점 O부터 움직인 거리가 $\frac{1}{3}$ 이상 $\frac{2}{3}$ 이하가 되어 호 AB 위에 있게 된다는 사실을 보인다.	2
	③ 점 Q의 속력 v가 9일 때, 점 P가 점 A에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{1}{3}$이므로 이 때 점 Q는 점 O부터 움직인 거리는 $9 \times \frac{1}{3} = 3$임을 보인다.	2
	④ 점 Q가 세 바퀴를 회전한 후에 점 A에 처음 도착하는 시각은 $9t = 3 + \frac{1}{3}$을 만족하는 $t = \frac{10}{27}$를 구한다.	3
	⑤ 한편 $\frac{1}{3} < \frac{10}{27} < \frac{2}{3}$이므로 $t = \frac{10}{27}$일 때 점 P도 호 AB 위에 있음을 확인한다.	1
2-2	① 점 Q가 원의 둘레를 두 바퀴 회전하기 전에 두 점 P, Q가 호 AB 위에 동시에 있기 위해서는 직선 $y = vx$는 연립부등식 $\begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{2}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{1}{3} \leq y \leq 1 + \frac{2}{3} \end{cases}$ 의 영역과 반드시 만나야한다는 사실을 이해한다.	2
	② 첫 번째 연립부등식의 영역을 R, 두 번째 연립부등식의 영역을 S라 했을 때, 직선 $y = vx$가 R과 만나기 위한 v의 최댓값은 직선이 점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$를 지날 때이기 때문에 $1 \leq v \leq 2$일 때 직선 $y = vx$가 R과 만난다는 사실을 보인다.	3
	③ 직선 $y = vx$가 S와 만나기 위한 v의 최댓값은 직선이 점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$를 지날 때이고 최솟값은 직선이 점 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$를 지날 때이기 때문에 $2 \leq v \leq 5$일 때, 직선 $y = vx$가 S와 만난다는 사실을 보인다.	3
	④ ①,②,③으로부터 구하고자 하는 속력 v의 범위가 $1 \leq v \leq 5$ 임을 안다.	2

하위 문항	채점 기준	배점
2-3(a)	① 첫 번째 부등식에 의하여 $f(0) \geq 2f(0)$이므로 $f(0) \leq 0$임을 보인다.	2
	② 두 번째 부등식에 의하여 $f(0) \geq 0$이므로 $f(0)=0$임을 구한다.	1
2-3(b)	① 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 $f(x+y) \geq f(x)+f(y)+4xy \quad \cdots\cdots$ ① $f(x) \geq 0 \quad \cdots\cdots$ ② 을 만족할 때, 실수 h에 대하여 부등식 ①과 ②에 의해 $f(x+h)-f(x) \geq f(x)+f(h)+4xh-f(x)=f(h)+4xh \geq 4xh \ \cdots$ ③ 가 성립함을 보인다.	4
	② $f(x)=f(x+h-h) \geq f(x+h)+f(-h)-4h(x+h) \ \cdots\cdots$④ $\geq f(x+h)-4h(x+h)$ 가 성립함을 보인다.	4
	③ ③과 ④에 의하여 $h>0$이면 $4x \leq \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 4(x+h) \quad \cdots\cdots$ ⑤ 이고, $h<0$이면 $4x \geq \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 4(x+h) \quad \cdots\cdots$ ⑥ 임을 보인다.	3
	④ 부등식 ⑤, ⑥과 함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x, \quad \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x$ 이기 때문에 $f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x$ 임을 파악한다.	3
	⑤ $f(x)=\int 4x\,dx=2x^2+C$이고, $f(0)=0$이므로 $C=0$임을 파악한다. 따라서 $f(x)=2x^2$임을 보이고. 한편 $f(x)=2x^2$는 부등식 ①과 ②를 만족함을 확인한다.	3

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

예시 답안

■ 2-1

점 P가 점 A에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{1}{3}$이므로 이 때 점 Q는 점 O로부터 움직인 거리가 $\frac{v}{3}$인 점이다. 그런데 $\frac{7}{3} \leq \frac{v}{3} \leq \frac{8}{3}$ 이므로 점 Q는 원의 둘레를 두 바퀴 회전한 후 점 O로부터 움직인 거리가 $\frac{1}{3}$ 이상 $\frac{2}{3}$ 이하가 되어 호 AB 위에 있게 된다.

이제 점 Q의 속력 v를 9라 하자. 점 P가 점 A에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{1}{3}$이므로 이 때 점 Q가 점 O로부터 움직인 거리는 $9 \times \frac{1}{3}=3$이다. 따라서 점 Q가 세 바퀴를 회전한 후에 점 A에 처음 도착하는 시각을 구하면 된다. 방정식 $9t=3+\frac{1}{3}$을 만족시키

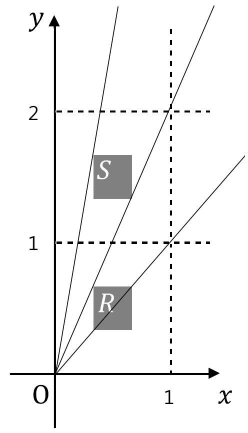
는 t를 구하면 $t=\dfrac{10}{27}$이다. 한편 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{10}{27}<\dfrac{2}{3}$이므로 $t=\dfrac{10}{27}$일 때 점 P도 호 AB 위에 있다. 따라서 답은 $\dfrac{10}{27}$이다.

■ 2-2

점 Q가 원의 둘레를 두 바퀴 회전하기 전에 두 점 P,Q가 호 AB 위에 동시에 있기 위해서는 직선 $y=vx$가 연립부등식

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{3}\le y\le\dfrac{2}{3}\end{cases}\quad \text{또는} \quad \begin{cases}\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{2}{3}\\ 1+\dfrac{1}{3}\le y\le 1+\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

의 영역과 만나야한다. (<그림3> 참조)



첫 번째 연립부등식의 영역을 R, 두 번째 연립부등식의 영역을 S라 하자. <그림 3>에서 직선 $y=vx$가 R과 만나기 위한 v의 최댓값은 직선이 점 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$를 지날 때임을 알 수 있다. 따라서 $1\le v\le 2$일 때 직선 $y=vx$가 R과 만난다. 또한 직선 $y=vx$가 S와 만나기 위한 v의 최댓값은 직선이 점 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$를 지날 때이고, 최솟값은 직선이 점 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$를 지날 때이다. 따라서 $2\le v\le 5$일 때, 직선 $y=vx$가 S와 만난다. 따라서 구하고자 하는 속력 v의 범위는 $1\le v\le 5$ 이다.

■ 2-3(a)

첫 번째 부등식에 의하여 $f(0)\ge 2f(0)$이므로 $f(0)\le 0$이고, 두 번째 부등식에 의하여 $f(0)\ge 0$이므로 $f(0)=0$이다.

■ 2-3(b)

정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 중에서

$$f(x+y)\ge f(x)+f(y)+4xy \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

$$f(x)\ \ge\ 0 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구해보자. 실수 h에 대하여 부등식 ①과 ②에 의해

$$f(x+h)-f(x)\ge f(x)+f(h)+4xh-f(x)=f(h)+4xh\ \ge\ 4xh \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

가 성립한다. 또한

$$f(x)=f(x+h-h)\ge\ f(x+h)+f(-h)-4h(x+h)\ge\ f(x+h)-4h(x+h)\ \cdots\cdots\text{④}$$

이다. 따라서 ③과 ④에 의하여 $h>0$이면

$$4x\le\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\le 4(x+h)\ \ \cdots\cdots\ \text{⑤}$$

이고, $h<0$이면

$$4x\ge\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ge 4(x+h)\ \ \cdots\cdots\ \text{⑥}$$

이다. 부등식 ⑤, ⑥과 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x,\qquad \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x$$

이다. 즉,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x$$

이다. 그러므로 $f(x)=\displaystyle\int 4x\,dx=2x^2+C$이고, $f(0)=0$이므로 $C=0$이다. 따라서 $f(x)=2x^2$이다. 한편 $f(x)=2x^2$는 부등식 ①과 ②를 만족시킨다.