2014학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 출제의도 및 문제해설

출제 의도

[제시문Ⅰ]은 인간 세포 내에서 유전 정보를 담고 있는 염색체의 종류와 DNA가 복제된 후 생식 세포 분열 과정을 통해 자손에게 전달되는 개념을 설명하고 있다. 또한, 환경적인 요인과 복제 과정상의 실수를 통해 세포 내 DNA 염기서열에 돌연변이가 발생할 수 있으며, 이로 인해 각종 형질들의 발현 정도 및 질병의 발병 위험성이 변화될 수 있음을 예시하고 있다. [문제1]은 [제시문Ⅰ]을 읽고 쌍둥이 집단에서 유전적 요인과 환경적 요인 중 예시된 4개의 형질 일치도에 관여하는 주요 요인이 무엇인지 추론하는 능력을 측정하기 위해 출제하였다. [문제2]는 확률의 개념을 이용하여 특정 질병의 발병 위험인자(돌연변이 유전자)를 보유한 집단 내 구성원 수를 계산하고, 돌연변이 유전자로 인해 유방암이 발병할 것으로 예측되는 사람들의 수를 계산하는 능력을 측정하고자 한다.

[제시문Ⅱ]는 고등학교 수학 교과과정에서 중요하게 다루어지는 미분적분법 및 이의 응용에 관한 질문이다. [문제3]은 제시된 문제의 조건을 만족하는 함수를 정의하고, 미분의 성질을 이용하여 이 함수의 그래프 개형을 그릴 수 있는지를 확인하기 위하여 출제하였다. [문제4]는 x축 위의 점에서 y축 위에 놓인 주어진 고정된 선분을 바라보았을 때 생기는 각도의 크기의 최댓값을 구하고, 각도가 최대인 점 Q_0에서 $\triangle ABQ_0$의 외접원이 x축에 접함을 보이는 문제이다. 이 문제를 해결하려면 제시문 <나>를 이용하여 주어진 문제를 변수 x에 대한 식으로 표현한 후, 삼각함수의 성질과 미분을 이용해 어떤 x에서 구하는 각이 최대가 되는지를 구하면 된다. 그 후 제시문 <다>를 이용해 각이 최대가 되는 점과 문제에 주어진 두 점을 동시에 지나는 외접원은 x축에 접한다는 것을 보이면 된다. [문제5]는 정적분의 응용에 관한 문제이다. 주어진 입체도형을 x축에 수직한 단면으로 잘랐을 때 생기는 단면이 문제에 제시되었으므로, 이 단면의 면적을 구하고, 제시문 <마>를 이용하여 주어진 입체도형의 부피를 구하면 된다. 적분의 계산 과정에는 삼각치환을 이용한 치환적분이 필요하고, 삼각함수의 배각공식, 반각공식을 사용하여 주어진 식을 쉽게 적분 가능한 형태로 변환시키는 과정이 필요하다.

문제해설

【문제1】

수험생들은 [제시문Ⅰ]의 <가>를 읽고서 쌍둥이간의 유전자 일치도에 관한 다음 개념을 먼저 파악 할 수 있어야 한다.

① 일란성 쌍둥이는 DNA 염기서열이 100% 서로 동일하지만, 이란성 쌍둥이는 평균 50% 동일하다.

② 일란성 쌍둥이들이 같은 가정에서 함께 성장하게 되면, 동일한 유전적 요인과 환경적 요인 하에서 성장하였음을 의미한다. 다른 가정에서 따로 성장하게 되면, 유전적 요인은 동일하지만 서로 다른 환경적 요인 하에서 성장하였음을 뜻한다.

③ 이란성 쌍둥이들이 같은 가정에서 함께 성장하게 되면, 유전적 요인은 50% 동일하고, 환경적 요인은 동일한 상황에서 성장하였음을 의미한다. 다른 가정에서 따로 성장하게 되면, 유전적 요인은 50% 동일하고, 서로 다른 환경적 요인 하에서 성장하였음을 뜻한다.

상기에 추론한 3가지 사항들에 근거하여, <표1>에서 제시하고 있는 네 가지 형질 획득에 미치는 유전적 요인과 환경적 요인의 영향을 분석해보면 아래와 같다.

① **몸무게:** 일란성 쌍둥이의 경우 함께 성장하거나 따로 성장한 경우 모두 일치도는 각각 98, 88로 다른 형질들의 일치도에 비해 상대적으로 100에 근접한다. 이란성 쌍둥이의 경우 함께 성장하거나 따로 성장한 경우 일치도는 각각 46, 44로 서로 유사한 일치도를 보이며 50에 근접한다. 따라서 일란성 쌍둥이와 이란성 쌍둥이 모두 성장 환경이 형질 일치도에 큰 영향을 미치지 못한다는 것을 알 수 있다. 즉, 환경적 요인보다는 유전적 요인이 몸무게 일치도의 결정에 주요한 영향을 미친다.

② **학업성취도:** 일란성 쌍둥이 및 이란성 쌍둥이 모두 함께 성장하였을 경우 일치도는 각각 86, 81이므로 100에 근접한다. 그런데, 쌍둥이들이 따로 성장하였을 경우 일치도는 각각 5, 4 이므로 현저히 낮다. 따라서, 학업성취도는 유

전적 요인보다는 함께 성장하였는지의 여부, 즉 환경적 요인이 형질 일치도에 주요한 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

③ **위암:** 일란성 쌍둥이 및 이란성 쌍둥이가 함께 성장하는 경우의 일치도는 각각 98, 51인데, 따로 성장하는 경우에는 절반 수준인 49, 25로 감소하게 된다. 같은 환경에서 자란 쌍둥이와 다른 환경에서 자란 쌍둥이들 간의 형질 일치도가 각각 50% 정도 나타나는 것으로 미루어 보아 유전적 요인이 어느 정도 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 또한, 환경적 요인이 형질 일치도에 어느 정도 영향을 미치기는 하지만, 학업성취도나 홍역의 경우처럼 절대적인 영향을 미치지는 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서, 유전적 요인 및 환경적 요인 모두 동일한 정도로 형질 일치도에 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

④ **홍역:** 일란성 쌍둥이 및 이란성 쌍둥이가 함께 성장하였을 경우 일치도는 각각 97, 96이므로 100에 근접한다. 그런데, 따로 성장하였을 경우 일치도는 각각 4, 3에 불과하다. 따라서, 홍역은 유전적 요인보다는 함께 성장하였는지의 여부, 즉 환경적 요인이 형질 일치도에 절대적인 영향을 미친다.

<표> 쌍둥이간 형질이 일치하는 정도와 주요 영향인자와의 관계

형 질	일란성 쌍둥이		이란성 쌍둥이		주요 영향인자
	같은 가정에서 함께 성장	다른 가정에서 따로 성장	같은 가정에서 함께 성장	다른 가정에서 따로 성장	
몸무게	매우 높음	매우 높음	조금 높음	조금 높음	유전적 요인
학업성취도	매우 높음	매우 낮음	매우 높음	매우 낮음	환경적 요인
위암	매우 높음	조금 높음	조금 높음	조금 높음	유전적 요인 및 환경적 요인
홍역	매우 높음	매우 낮음	매우 높음	매우 낮음	환경적 요인

원자력 발전소에서 유출된 방사능 물질인 세슘-137은 [제시문I]의 <다>에서 설명된 바와 같이 인간의 체세포 내 DNA의 염기서열에 변화를 초래하는 돌연변이 유발물질이다. 따라서, 10년 간 방사능에 노출되면 유전자에 돌연변이를 유발하여 각종 형질 발현에 영향을 미칠 것으로 예측되므로, 유전적 요인에 의해 가장 영향을 많이 받는 형질인 몸무게의 일치도에 가장 많은 변화가 생길 것으로 추측해 볼 수 있다. 일반적으로, 방사능 유출은 환경적 요인의 변화라고 생각할 수 있지만, 유전자 염기서열 변이를 통해 유전인자의 변화를 초래하는 물질임을 명심하여야 한다.

【문제2】

[문제2]는 [제시문I]의 <나>~<라>에 설명된 내용을 읽고 국내 40세 이상의 여성 중 BRCA1 유전자의 돌연변이로 인해 유방암이 발병할 것으로 예측되는 환자수를 계산하는 문제이다.

[제시문I]에 설명된 내용들로부터 다음 정보들을 먼저 파악하여야 한다. ① 생식 세포 내 인간 유전체에는 3×10^9개의 염기쌍이 있다.(제시문 <다>) ② DNA 복제과정에서 생기는 돌연변이 빈도는 1×10^9 염기쌍 당 하나이다.(제시문 <다>) ③ 생식 세포 하나 당 평균 3개의 돌연변이가 발생한다. (제시문 <다>) ④ BRCA1 유전자는 1×10^4개의 염기쌍으로 이루어져 있다. (제시문 <라>) ⑤ 우리나라 40세 이상 여성의 수는 12,000,000명이다.(문제의 <표2>) ⑥ 돌연변이 BRCA1 유전자 보유자의 유방암 발병률은 80% 이다. (제시문 <라>)

위에 기술한 6가지 정보를 바탕으로 아래 순서대로 계산하면 유방암 환자의 수를 계산할 수 있다.

① 생식 세포에 평균적으로 발생하는 3개의 돌연변이들 중 BRCA1 유전자에 최소 하나 이상의 돌연변이가 존재할 확률은 다음과 같다.

$$3 \times \frac{10^4}{30 \times 10^8} = \frac{1}{10^5} \qquad \text{-----------①}$$

② BRCA1 유전자는 각각의 생식 세포(정자, 난자)로부터 유래되므로, 40세 이상의 여성들이 보유한 BRCA1 유전자의 전체 수는 다음과 같다.

$$2 \times 12{,}000{,}000\text{명} = 24{,}000{,}000\text{개} \qquad \text{-----------②}$$

③ 40세 이상의 여성들이 보유한 돌연변이 BRCA1 유전자의 수는 다음과 같다.

$$24{,}000{,}000\text{개} \times \frac{1}{10^5} = 240\text{개} \qquad \text{-----------③}$$

한 사람이 2개의 돌연변이 BRCA1 유전자를 가질 수는 없으므로, 40세 이상 여성 중 240명이 돌연변이 BRCA1 유전자를 1개씩 가지고 있다.

④ 돌연변이 BRCA1 유전자를 보유한 여성의 발병 위험율은 80%이므로, 실제 유방암이 발병할 것으로 예측되는 환자 수는 다음과 같다.

240 × 0.8 = 192명 -----------④

그러므로 국내 40세 이상의 여성들 중 192명은 잔여 생존기간 동안 BRCA1 유전자의 돌연변이로 인해 유방암이 발병될 것으로 예측된다.

【문제3】

[문제3]은 제시된 문제의 조건을 만족하는 함수를 정의하고, 미분의 성질을 이용하여 이 함수의 그래프 개형을 그리는 문제이다.

선분 AB 위의 임의의 점 $\mathrm{Q}(0,s)$에서 점 $\mathrm{P}(1,t)$ 까지의 거리는

$$\sqrt{1+(t-s)^2} = \sqrt{s^2-2ts+t^2+1}, \quad b \le s \le a \qquad \text{------(1)}$$

로 주어지므로, 각 실수 t에 대하여 이 함수의 최솟값으로 주어진 함수 $f(t)$는

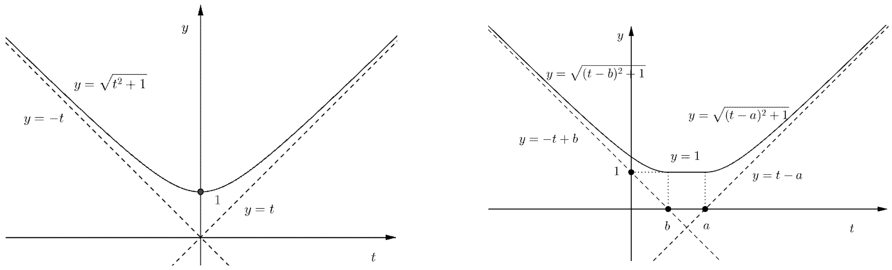
$$f(t) = \begin{cases} 1 & , b \le t \le a \\ \sqrt{(t-b)^2+1} & , t < b \\ \sqrt{(t-a)^2+1} & , t > a \end{cases} \qquad \text{-------(2)}$$

가 된다.

이 함수의 그래프 개형을 그리기 위해 $g(t) = \sqrt{t^2+1}$의 그래프 개형을 파악하자. $g(-t) = g(t)$이므로 이 함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $t > 0$인 경우

$$g'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} > 0,\ g''(t) = \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}} > 0 \text{이므로} \qquad \text{------- (3)}$$

이 함수의 그래프는 $t=0$에서 최솟값을 갖고 $t>0$일 때 증가함수이며 모든 점에서 아래로 볼록인 형태가 된다. 점근선은 $y = \pm t$이다. 함수 $f(t)$의 그래프는 함수 $g(t)$의 그래프 일부분의 평행이동과 상수함수의 그래프로부터 구할 수 있고, 이로부터 $f(t)$의 그래프 개형을 다음과 같이 그릴 수 있다.



----(4)

(또는, $t<b,\ b \le t \le a,\ t>a$인 경우 각각에 대해 미분을 통해 그래프의 개형을 구하여도 된다.)

【문제4】

[문제4]는 x축 위의 점에서 y축 위에 놓인 주어진 고정된 선분을 바라보았을 때 생기는 각도의 크기의 최댓값을 구하고, 각도가 최대인 점 Q_0에서 $\triangle \mathrm{ABQ}_0$의 외접원이 x축에 접함을 보이는 문제이다.

$Q(x,0)$에서 선분 AB를 바라본 각의 크기는 $Q(x,0)$에서와 $Q(-x,0)$에서 동일하므로 $x \geq 0$로 제한하고 문제를 풀어도 된다.

문제에 제시된 그림2로부터 $\cot\alpha(x) = \frac{x}{a}$, $\cot\beta(x) = \frac{x}{b}$임을 알 수 있고, 삼각함수의 덧셈공식을 사용하여

$\cot\theta(x) = \cot(\alpha(x) - \beta(x)) = \frac{1 + \cot\alpha(x) \cdot \cot\beta(x)}{\cot\beta(x) - \cot\alpha(x)} = \frac{1 + \frac{x^2}{ab}}{\frac{x}{b} - \frac{x}{a}} = \frac{x + \frac{ab}{x}}{(a-b)}$를 얻는다.

(또는, $\tan\theta(\mathrm{x}) = \tan(\alpha(\mathrm{x}) - \beta(\mathrm{x})) = \frac{\tan[\alpha(\mathrm{x})] - \tan[\beta(\mathrm{x})]}{1 + \tan[\alpha(\mathrm{x})] \cdot \tan[\beta(\mathrm{x})]} = \frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}} = \frac{(a-b)x}{x^2 + ab}$로 부터

$\cot\theta(x) = \frac{x^2 + ab}{(a-b)x}$로 계산하여도 된다.) -------(1)

$0 < \theta(x) < \frac{\pi}{2}$이고, 이 때 코탄젠트 함수는 감소함수이고 $a - b > 0$이므로, $\theta(x)$의 최댓값은 $h(x) = x + \frac{ab}{x}$, $x > 0$, 가 최솟값일 때 나타난다. -------(2)

$h'(x) = \frac{1}{x^2}(x^2 - ab)$로부터 이 함수의 최솟값은 $x = \sqrt{ab}$일 때 $h(\sqrt{ab}) = 2\sqrt{ab}$이므로, $\theta(x)$의 최댓값은 $x = \sqrt{ab}$일 때 나타난다. (참고: $h(x) = x + \frac{ab}{x}$, $x > 0$,의 최솟값은 기하평균과 산술평균의 관계를 이용하여 $h(x) \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} = 2\sqrt{ab}$이고 여기서 최솟값은 $x = \frac{ab}{x}$일 때, 즉, $x = \sqrt{ab}$에서 나타난다고 하여도 된다.)
-------(3)

그러므로 구하는 점 Q_0의 좌표는 $(\sqrt{ab}, 0)$이고 $\cot(\theta(\sqrt{ab})) = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$이다. -------(4)

(참고: $x < 0$인 경우 구하는 점 Q_0의 좌표는 $(-\sqrt{ab}, 0)$이고, $\cot(\theta(-\sqrt{ab})) = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$이다.)

만일 삼각형 ABQ_0의 외접원이 x축에 접하지 않는다면, 이 원은 x축과 서로 다른 두 점 $Q_0(x_0, 0)$, $Q_1(x_1, 0)$에서 만난다. $x_0 = \sqrt{ab}$이므로 제시문Ⅱ <다>를 이용하면 $x_0 \cdot x_1 = \sqrt{ab} \cdot x_1 = ab$를 만족해야 하고, 이로부터 $x_1 = \sqrt{ab} = x_0$를 얻는다. 그러므로 $Q_0 = Q_1$이 된다. 이는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다는 가정에 위배된다. 따라서 삼각형 ABQ_0의 외접원이 x축에 접하여야 한다.

(또는 다음과 같이 접근하여도 된다. 만일 삼각형 ABQ_0의 외접원이 x축에 접하지 않는다면 이 원은 x축과 두 점에서 만난다. 따라서 x축 위에는 이 외접원의 내부에 놓인 점 Q_1이 존재하고 이 때 각 $\angle AQ_1B$의 크기는 각 $\angle AQ_0B$의 크기보다 크다. 이는 각 $\angle AQ_0B$의 크기가 최대란 사실에 위배된다. 따라서 이 외접원은 x축에 접해야 한다.) -------(5)

【문제5】

[문제5]는 정적분의 응용에 관한 문제이다. 주어진 입체도형을 x축에 수직한 단면으로 잘랐을 때 생기는 단면이 문제에 제시되었으므로, 이 단면의 면적을 구하고 제시문 <마>를 이용하여 주어진 입체도형의 부피를 구하면 된다.

x축에 수직한 평면과 입체도형 E의 교집합으로 주어지는 단면의 면적은 $S(x) = (px^2 + qx + r)\sqrt{1-x^2}$이므로 입체도형 E의 부피는 정적분의 정의에 의하여

$$\int_{-1}^{1}(px^2 + qx + r)\sqrt{1-x^2}\,dx = p\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx + q\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx + r\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

로 주어진다. --------(1)

이 적분을 계산하여 보자.

1) $x\sqrt{1-x^2}$ 은 원점에 대칭인 함수이므로 $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$ 이다. --------(2)

2) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ 는 반지름이 1인 반원의 면적과 같으므로 $\frac{1}{2}\pi$ 이다. --------(3)

3) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ 의 값을 구하기 위해 $x=\sin\theta$ 로 치환하자. 그러면 $dx=\cos\theta\, d\theta$ 이고

$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta\,\cos^2\theta\, d\theta$ 이다. -------(4)

삼각함수의 배각공식과 반각공식을 사용하여 식을 정리하자. 그러면 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ 이고

$\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$ 이므로 위 식은 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{8}\,d\theta = \left[\frac{1}{8}\theta - \frac{\sin(4\theta)}{32}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$

가 된다. ----------(5)

(참고: 1)과 2)의 계산과정에서 3)에서와 같이 삼각치환을 하여 계산하여도 된다.)

그러므로 1) ~ 3)에 의하여

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,(px^2+qx+r)\,dx = \frac{(p+4r)\pi}{8} \qquad \text{---------(6)}$$

이다.

2014학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 평가기준표

배점기준표

문항	배점	세 부 내 용	1등급	2등급	3등급	4등급	5등급	6등급
문제2	20	* 제시문에서 타당한 자료를 선택하여 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?	20	18	16	13	9	5
문제3	20		20	18	16	13	9	5
문제4	20		20	18	16	13	9	5
문제5	20		20	18	16	13	9	5
문제1	20	* 제시문에 근거하여 자료를 정확하게 분석하였는가? * 제시문에 근거하여 논리적인 추론을 전개하였는가? * 정확한 어법과 표현을 사용하여 서술하였는가?	20	18	16	13	9	5

【문제1】 아래에 제시된 답안에서 다음과 같이 점수를 부여한다.

[1등급] ①, ②, ③, ④, ⑤ 항목 모두 정답을 서술한 경우
[2등급] ①, ②, ③, ④ 항목을 맞추고, ⑤번 항목은 틀린 경우
[3등급] ①, ②, ④, ⑤ 항목은 맞추고, ③번 항목은 틀린 경우
[4등급] ①, ②, ③, ④, ⑤ 항목들 중 3개를 맞춘 경우
[5등급] ①, ②, ③, ④, ⑤ 항목들 중 2개를 맞춘 경우
[6등급] ①, ②, ③, ④, ⑤ 항목들 중 1개 이하를 맞춘 경우

수험생들은 [제시문I]을 읽고 쌍둥이들의 형질 일치도에 미치는 유전적 요인과 환경적 요인들의 영향력 정도를 논리적으로 생각하고 서술하되, 다음의 내용들을 포함하여야 한다.

① **몸무게:** 일란성 쌍둥이의 경우 함께 성장하거나 따로 성장한 두 경우 모두 일치도가 매우 높고(100에 근접), 이란성 쌍둥이의 일치도 역시 함께 성장하거나 따로 성장한 경우 서로 유사하다. 따라서 유전적 요인이 몸무게 일치도에 주요한 영향을 미친다.

② **학업성취도:** 일란성 쌍둥이 및 이란성 쌍둥이 모두 함께 성장하였을 경우 일치도는 100에 근접한다. 그런데, 쌍둥이들이 따로 성장하였을 경우 일치도는 각각 5, 4 이므로 현저히 낮다. 따라서, 환경적 요인이 형질 일치도에 주요한 영향을 미친다.

③ **위암:** 일란성 쌍둥이 및 이란성 쌍둥이가 함께 성장하는 경우의 일치도는 각각 98, 51인데, 따로 성장하는 경우에는 절반 수준인 49, 25로 감소하게 된다. 따라서, 유전적 요인 및 환경적 요인 모두 동일한 정도로 형질 일치도에 영향을 미친다.

④ **홍역:** 일란성 쌍둥이 및 이란성 쌍둥이가 함께 성장하였을 경우 일치도는 각각 100에 근접한다. 그런데, 따로 성장하였을 경우 일치도는 각각 4, 3에 불과하다. 따라서, 홍역은 환경적 요인이 형질 일치도에 절대적인 영향을 미친다.

⑤ 원자력 발전소에서 유출된 방사능 물질인 세슘-137은 [제시문I]의 <다>에서 설명된 바와 같이 인간의 체세포 내 DNA의 염기서열에 변화를 초래하는 돌연변이 유발물질이다. 10년 간 방사능에 노출되면 유전자에 돌연변이를 유발하여 각종 형질 발현에 영향을 미칠 것으로 예측된다. 따라서, 유전적 요인의 영향을 많이 받는 형질인 몸무게의 일치도에 가장 많은 변화가 생길 것이다.

【문제2】 아래에 제시된 답안에서 다음과 같이 점수를 부여한다.

[1등급] ①, ②, ③, ④ 단계를 거쳐, 정답을 192명으로 기술한 경우
[2등급] ①, ②, ③ 단계를 거쳤으나, ④ 단계를 거치지 않아 정답을 240개(명)으로 풀이한 경우
[3등급] ②번 단계를 생략한 채, ③, ④ 단계 과정으로 넘어가서 정답을 96명으로 기술한 경우
[4등급] ①, ②번 단계 모두 거쳤으나, 그 이후 ③, ④ 단계 과정으로 넘어가지 못한 경우
[5등급] ①, ②번 단계 중 어느 한 가지만 풀이한 경우
[6등급] 기타

① 3개의 돌연변이들 중 BRCA1 유전자에 최소 하나 이상의 돌연변이가 존재할 확률은 다음과 같다.

$$3 \times \frac{10^4}{30 \times 10^8} = \frac{1}{10^5} \qquad \text{-----------①}$$

② BRCA1 유전자는 각각의 생식세포(정자, 난자)로부터 유래되므로, 40세 이상의 여성들이 보유한 BRCA1 유전자의 전체 수는 다음과 같다.

$$2 \times 12{,}000{,}000\text{명} = 24{,}000{,}000\text{개} \qquad \text{-----------②}$$

③ 40세 이상의 여성들이 보유한 돌연변이 BRCA1 유전자의 수는 다음과 같다.

$$24{,}000{,}000\text{개} \times \frac{1}{10^5} = 240\text{개} \qquad \text{-----------③}$$

④ 돌연변이 BRCA1 유전자를 보유한 여성들의 발병 위험률은 80% 이므로, 실제 유방암이 발병할 것으로 예측되는 환자 수는 다음과 같다.

240 × 0.8 = 192명 -----------④

【문제3】 다음 기준에 따라 등급을 부여한다.

1등급: (1)~(3)의 과정 또는 (1)~(2)와 (3-1) 과정을 모두 다 거친 후 (4)의 오른쪽 그래프를 구함 (점근선은 평가하지 않음)
2등급: (1)~(2) 과정을 거친 후 (3) 또는 (3-1) 과정을 거쳐 그래프를 구하였으나 세 부분 중 1부분의 그래프가 잘못된 경우
3등급: (1)~(2) 과정을 거친 후 (3)을 구함 또는 (3-1) 과정으로 그래프를 구하였으나 세 부분 중 2부분의 그래프가 잘못된 경우
4등급: (1)~(2) 과정을 옳게 구함
5등급: (1) 과정을 옳게 구함
6등급: 문제에 접근하지 못함

선분 AB 위의 임의의 점 $\mathrm{Q}(0, s)$에서 점 $\mathrm{P}(1, t)$까지의 거리는

$$\sqrt{1 + (t-s)^2} = \sqrt{s^2 - 2ts + t^2 + 1}, \quad b \le s \le a \qquad \text{------(1)}$$

로 주어지고. 이로부터 각 실수 t에 대하여 이 함수의 최솟값으로 주어진 함수 $f(t)$는

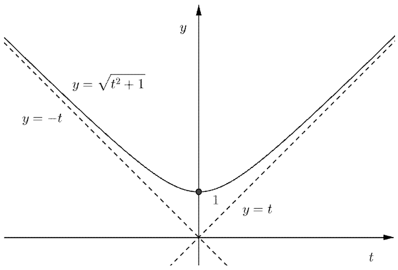
$$f(t) = \begin{cases} 1 & , b \le t \le a \\ \sqrt{(t-b)^2 + 1} & , t < b \\ \sqrt{(t-a)^2 + 1} & , t > a \end{cases} \qquad \text{-------(2)}$$

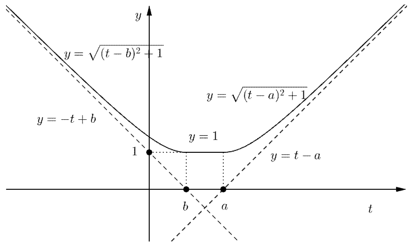
가 된다.

이 함수의 그래프 개형을 그리기 위해 $g(t) = \sqrt{t^2 + 1}$의 그래프 개형을 파악하자. $g(-t) = g(t)$이므로 이 함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $t > 0$인 경우 $g'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} > 0$,

$g''(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^{3/2}} > 0$이므로 이 함수의 그래프는 $t = 0$에서 최솟값을 갖고 $t > 0$일 때 증가함수이며 모든 점에서 아래로 볼록인 형태가 된다. 점근선은 $y = \pm t$이다. ------- (3)

함수 $f(t)$의 그래프는 함수 $g(t)$의 그래프 일부분의 평행이동과 상수함수의 그래프로부터 구할 수 있고, 이로부터 $f(t)$의 그래프 개형을 다음과 같이 그릴 수 있다.





---------(4)

(또는 $t<b,\ b\le t\le a,\ t>a$인 경우 각각에 대해 미분을 통해 그래프의 개형을 구하여도 된다.) -------(3-1)

【문제4】 다음 기준에 따라 등급을 부여한다.

1등급: (1)~(5)의 전 과정을 옳게 보였다.
2등급: (1)~(4)의 과정을 옳게 보이거나 (1)~(3)과정을 옳게 보이고 (5)를 보였다.
3등급: (1)~(3)의 과정을 옳게 보이거나 (1)~(2)과정 및 (5)를 옳게 보였다.
4등급: (1)~(2)의 과정을 옳게 보이거나 (1) 및 (5)를 옳게 보였다.
5등급: (1)을 구하거나 (5)를 보였다.
6등급: 문제에 접근하지 못했다.

$\mathrm{Q}(x,0)$에서 선분 AB를 바라본 각의 크기는 $\mathrm{Q}(x,0)$에서와 $\mathrm{Q}(-x,0)$에서 동일하므로 $x\ge 0$으로 제한하고 문제를 풀어도 된다.

문제에 제시된 그림2로부터 $\cot\alpha(x)=\dfrac{x}{a}$, $\cot\beta(x)=\dfrac{x}{b}$임을 알 수 있고, 삼각함수의 덧셈공식을 사용하여

$\cot\theta(x)=\cot(\alpha(x)-\beta(x))=\dfrac{1+\cot\alpha(x)\cdot\cot\beta(x)}{\cot\beta(x)-\cot\alpha(x)}=\dfrac{1+\dfrac{x^2}{ab}}{\dfrac{x}{b}-\dfrac{x}{a}}=\dfrac{x+\dfrac{ab}{x}}{(a-b)}$를 얻는다. -------(1)

(또는 $\tan\theta(x)=\tan(\alpha(x)-\beta(x))=\dfrac{\tan\alpha(x)-\tan\beta(x)}{1+\tan\alpha(x)\cdot\tan\beta(x)}=\dfrac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{b}{x}}=\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}$로 부터

$\cot\theta(x)=\dfrac{x^2+ab}{(a-b)x}$로 계산하여도 된다.)

$0<\theta(x)<\dfrac{\pi}{2}$에서 코탄젠트 함수는 감소함수이고 $a-b>0$이므로, $\theta(x)$의 최댓값은 $h(x)=x+\dfrac{ab}{x}$, $x>0$, 가 최솟값일 때 나타난다. ------(2)

$h'(x)=\dfrac{1}{x^2}(x^2-ab)$로부터 이 함수의 최솟값은 $x=\sqrt{ab}$일 때 $h(\sqrt{ab})=2\sqrt{ab}$이므로, $\theta(x)$의 최댓값은 $x=\sqrt{ab}$일 때 나타나고

(참고: $h(x)=x+\dfrac{ab}{x}$, $x>0$, 의 최솟값은 기하평균과 산술평균의 관계를 이용하여

$h(x)\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{ab}{x}}=2\sqrt{ab}$이고 최솟값은 $x=\dfrac{ab}{x}$일 때, 즉, $x=\sqrt{ab}$에서 나타난다고 하여도 된다.) --(3)

그러므로 구하는 점 Q_0의 좌표는 $(\sqrt{ab},0)$이고 $\cot(\theta(\sqrt{ab}))=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}$이다.

(참고: $x<0$인 경우, Q_0의 좌표는 $(-\sqrt{ab},0)$이고, $\cot(\theta(-\sqrt{ab}))=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}$이다.) --------(4)

만일 삼각형 ABQ_0의 외접원이 x축에 접하지 않는다면, 이 원은 x축과 서로 다른 두 점 $\mathrm{Q}_0(x_0,0)$, $\mathrm{Q}_1(x_1,0)$에서 만난다. $x_0=\sqrt{ab}$이므로 제시문II <다>를 이용하면 $x_0\cdot x_1=\sqrt{ab}\cdot x_1=ab$를 만족해야 하고 이로부터

$x_1 = \sqrt{ab} = x_0$를 얻는다. 그러므로 $Q_0 = Q_1$이 된다. 이는 가정에 위배된다. 따라서 삼각형 ABQ_0의 외접원이 x축에 접하여야 한다. --------(5)

(또는 다음과 같이 접근하여도 된다. 만일 삼각형 ABQ_0의 외접원이 x축에 접하지 않는다면 이 원은 x축과 두 점에서 만난다. 따라서 x축 위에는 이 외접원의 내부에 놓인 점 Q_1이 존재하고 이 때 각 $\angle AQ_1B$의 크기는 각 $\angle AQ_0B$의 크기보다 크다. 이는 각 $\angle AQ_0B$의 크기가 최대란 사실에 위배된다. 따라서 이 외접원은 x축에 접해야 한다.)
--------(5-1)

【문제5】 다음 기준에 따라 등급을 부여한다.

1등급: (1)~(5)의 과정을 거쳐 (6)을 구해냈다.
2등급: (1)의 식을 옳게 세운 후 (2), (3), (4)를 옳게 계산하거나, (2), (3)중 하나와 (4)-(5)를 옳게 계산했다.
3등급: (1)의 식을 옳게 세운 후 (2), (3), (4)중 두개를 옳게 계산했다.
4등급: (1)의 식을 옳게 세운 후 (2), (3), (4)중 하나를 옳게 계산했다.
5등급: (1)의 식을 옳게 세웠다.
6등급: 문제에 접근하지 못했다.

x축에 수직한 평면과 입체도형 E의 교집합으로 주어지는 단면의 면적은
$S(x) = (px^2 + qx + r)\sqrt{1-x^2}$이므로 입체도형 E의 부피는 정적분의 정의에 의하여

$$\int_{-1}^{1} (px^2 + qx + r)\sqrt{1-x^2}\,dx = p\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx + q\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx + r\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$ ----(1)

로 주어진다. 이 적분을 계산하여 보자.

1) $x\sqrt{1-x^2}$은 원점에 대칭인 함수이므로 $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$이다. --------(2)

2) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$는 반지름이 1인 반원의 면적과 같으므로 $\frac{1}{2}\pi$이다. --------(3)

3) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$의 값을 구하기 위해 $x = \sin\theta$로 치환하자. 그러면 $dx = \cos\theta\, d\theta$이고

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$ 이다. --------(4)

삼각함수의 배각공식과 반각공식을 사용하여 식을 정리하자. 그러면 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$이고

$\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$이므로 위 식은

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{8}\,d\theta = \left[\frac{1}{8}\theta - \frac{\sin(4\theta)}{32}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$ --------(5)

가 된다. (참고: 1)과 2)의 계산을 위해 삼각치환을 하여도 된다.)

1)~3)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} (px^2 + qx + r)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{(p+4r)\pi}{8}$$ --------(6)

이다.

2014학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 학생답안

【문제1】

<표1>에서 보면 몸무게는 일란성 쌍둥이와 이란성 쌍둥이 모두 같은 곳에서 성장하던 다른 곳에서 성장하던 일치도는 비슷하다. 따라서 이는 유전적 요인이 더 큰 영향을 미친다고 볼 수 있다. 마찬가지로 나머지 형질들을 비교해볼 때, 학업성취도나 홍역의 경우는 일란성 쌍둥이와 이란성 쌍둥이 모두같은 가정에서 성장했을 때 일치도가 그렇지 않았을 때의 일치도보다 높으므로 이는 환경적 요인이 더 큰 영향을 미친다는 것을 의미한다. 하지만 위암의 경우 같은 가정에서 성장한 쌍둥이와 다른 가정에서 성장한 쌍둥이들 간의 일치도가 50% 정도 나타나는 것으로 볼 때 유전적 요인과 환경적 요인이 동일한 영향을 미친다고 볼 수 있다.

'세슘-137'은 체세포 내 유전자에 들어있는 DNA에 돌연변이를 유발한다. 따라서 10년 후 이 쌍둥이들을 다시 조사했을 때 일치도가 가장 많이 변화할 것으로 예상되는 형질은 유전적 요인이 가장 크게 영향을 미치는 몸무게 형질이다.

【문제2】

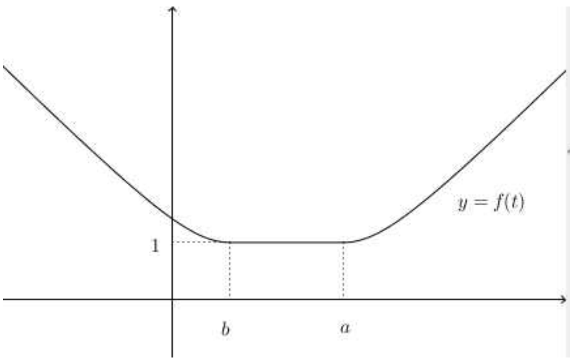
문제의 조건에서 조사 대상자의 부모 세대 체세포에는 정상 BRCAI 유전자만 존재한다고 한다. 따라서 조사 대상자의 체세포에 있는 BRCAI 유전자에서 자연적인 돌연변이가 생겨 병이 발병되는 것이다. BRCAI 유전자는 총 10,000개의 염기쌍으로 구성되어 있고 이들 중 하나의 염기쌍에 돌연변이가 생기면 발병 위험성(80%)이 커진다고 한다. 그리고 제시문 <다>에서 복제 과정에서 평균적인 실수 빈도는 10억개의 염기쌍 중 단 한 개이고, 생식세포 하나에는 총 30억개의 염기쌍이 존재한다고 한다. 또한 40세 이상 여자는 12×10^6명이므로 이들은 $2\times12\times10^6$ 개의 생식세포로부터 유래되었다.

즉, $2\times12\times10^6\times\dfrac{10^4}{3\times10^9}\times3\times\dfrac{80}{100}=192$ 이므로, 192명의 여성에게 유방암이 발병할 것이다.

【문제3】

t를 구간별로 나누어 함수를 구해야 한다. 따라서, $f(t)=\begin{cases}\sqrt{(t-a)^2+1} & (t>a)\\ 1 & (b\leq t\leq a)\\ \sqrt{(t-b)^2+1} & (t<b)\end{cases}$ 이다.

이 함수의 그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



왜냐하면 $t>a$에서 $f(t)=\sqrt{(t-a)^2+1}$ 이고 $f'(t)=\dfrac{(t-a)}{\sqrt{(t-a)^2+1}}>0$ 이며

$f''(t) = \dfrac{1}{((t-a)^2+1)\sqrt{(t-a)^2+1}} > 0$ 이기 때문이다.

그리고 $t < b$인 구간에서는 $t > a$에서 그려지는 그래프 개형을 직선 $x = a$에 대하여 대칭변환으로 얻어진 그래프를 x축의 음의방향으로 $(a-b)$만큼 평행이동한 그래프로 나타난다.

【문제4】

우선, $\tan\alpha(x) = \dfrac{a}{x}$ 이고, $\tan\beta(x) = \dfrac{b}{x}$ 이며 $\theta(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ 이다. 따라서 $\tan\theta(x) = \tan(\alpha(x) - \beta(x))$ 이다.

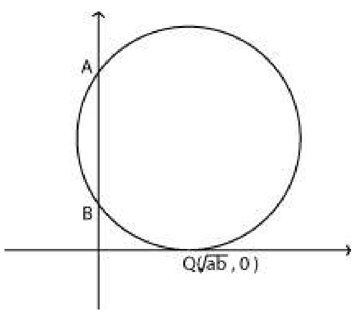
제시문 <나>에 제시된 식에 의해 $\tan\theta(x) = \dfrac{\tan\alpha(x) - \tan\beta(x)}{1 + \tan\alpha(x)\tan\beta(x)} = \dfrac{\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x}}{1 + \dfrac{a}{x}\dfrac{b}{x}} = \dfrac{\dfrac{a-b}{x}}{\dfrac{x^2+ab}{x^2}} = \dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}$ 이다.

따라서 $\cot\theta(x) = \dfrac{x^2+ab}{(a-b)x}$ 이다.

그리고 $\theta(x)$가 최대가 되려면 $\tan\theta(x)$는 최대가 되어야 한다. $f(x) = \tan\theta(x)$라 해서 $f'(x)$를 구하면 $f'(x) = \dfrac{(a-b)(-x^2+ab)}{(x^2+ab)^2}$ 이다. $f'(x) = 0$이 되는 점은 $x = \sqrt{(ab)}$ 또는 $x = -\sqrt{(ab)}$ 일 때이다.

	$\cdots$	$-\sqrt{(ab)}$	$\cdots$	$\sqrt{(ab)}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗		↘

그래프 개형을 잡아보면 왼쪽과 같으므로 $f(x) = \tan\theta(x)$는 $x = \sqrt{(ab)}$ 일 때 최대이다. 즉, $Q_0(\sqrt{ab}, 0)$일 때, $\tan\theta(x) = \dfrac{(a-b)}{2\sqrt{ab}}$ 이다.



왼쪽 그림에서, $\triangle ABQ_0$의 외접원은 y축과 두 점 A, B에서 만나고 x축과 Q_0에서 만난다. 제시문 <다>에 따라 $Q(\sqrt{ab}, 0)$일 때, $\overline{OQ}^2 = \overline{OA} \times \overline{OB}$ 이므로 $\triangle ABQ_0$의 외접원은 x축에 접한다.

【문제5】

제시문 <마>에서 구간 $[a,b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체 도형을 자른 단면의 넓이가 $s(x)$일 때, 입체도형의 부피 $V = \int_a^b s(x)dx$를 알 수 있다. 따라서 입체도형 E의 부피를 구하기 위해서는 구간과 단면적을 알아야 한다.

우선 t 구간은 $[-1,1]$이며 단면적의 넓이는 평면위의 세 점 $(t,0,h(t))$, $(t,\sqrt{1-t^2},0)$, $(t,-\sqrt{1-t^2},0)$을 꼭짓점으로 갖는 이등변삼각형의 넓이 이므로 단면적의 넓이

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(\text{이등변삼각형의밑변})\times(\text{이등변삼각형의높이})=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{1-t^2}\times(pt^2+qt+r)$$

$$=\sqrt{1-t^2}\,(pt^2+qt+r)$$

따라서 입체도형 E의 부피 $V=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,(pt^2+qt+r)dt$

$t=\sin\theta$로 치환하면 $dt=\cos\theta d\theta$ 이며,

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(p\sin^2\theta+q\sin\theta+r)\cos\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(p\sin^2\theta+q\sin\theta+r)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(p\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)+q\cos^2\theta\ \sin\theta+r\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=p[\frac{1}{8}\theta-\frac{\sin4\theta}{32}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+[-\frac{1}{3}q\cos^3\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+r[\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin(2\theta)}{4}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=p\times\frac{\pi}{8}+r\times\frac{\pi}{2}$$

따라서 입체도형 E의 부피는 $\frac{p}{8}\pi+\frac{r}{2}\pi$ 이다.