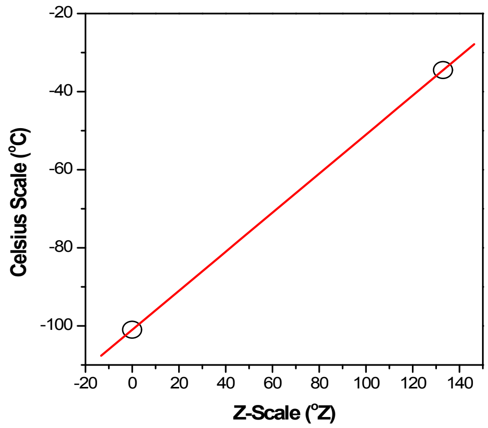
2012학년도 수시 1차 논술고사 예시문제(자연계) 문제 해설

< 문제 1 >

이 행성의 온도측정 척도는 1기압에서 염소의 녹는점과 끓는점을 기준으로 하고 있으며, 녹는점을 “0 °Z”, 끓는점을 “133 °Z”로 규정하였다. 따라서 섭씨온도와 비교하면 “0 °Z = −101.0 °C”와 “133 °Z = −34.5 °C”의 관계를 가지고 있음을 알 수 있다.

예시문에 나타낸 것과 같은 관계식은 아래 그림을 통해 나타낼 수 있다.



$$\text{기울기} = \frac{-34.5\,^{o}C - (-101.0\,^{o}C)}{133\,^{o}Z - 0\,^{o}Z} = \frac{1\,^{o}C}{2\,^{o}Z}$$

$$*\ y\text{축 절편}:$$

$$y = \frac{1}{2}x + b \ \rightarrow\ b = y - \frac{1}{2}x \ (y = -101.0,\ x = 0\text{을 대입하면}) \rightarrow b = -101.0$$

따라서, 섭씨온도와 Z−scale간의 관계식은 아래와 같다.

$$\text{섭씨온도}(^{o}C) = \frac{1^{o}C}{2^{o}Z} \times Z\text{온도}(^{o}Z) - 101.0$$

$\text{절대온도}(K) = \text{섭씨온도}(^{o}C) + 273.15K$ 이므로

$$\text{절대온도}(K) = \left(\frac{1^{o}C}{2^{o}Z} \times Z\text{온도}(^{o}Z) - 101.0\right) + 273.15$$

$$\therefore \text{절대온도}(K) = \frac{1^{o}C}{2^{o}Z} \times Z\text{온도}(^{o}Z) + 172.15$$

또한 이 행성의 평균온도가 300 °Z일 때 이 온도는 섭씨온도 단위로 49 °C이다.

$$\text{섭씨온도}(^{o}C) = \frac{1^{o}C}{2^{o}Z} \times Z\text{온도}(^{o}Z) - 101.0^{o}C$$

$$= \frac{1^{o}C}{2^{o}Z} \times (300^{o}Z) - 101.0^{o}C = 150^{o}C - 101.0^{o}C = 49^{o}C$$

< 문제 2 >

생명체는 생명현상을 나타내기 위해 다양한 대사작용을 한다. 물은 지구에 존재하는 모든 생물계에서 가장 풍부한 물질로 대부분의 생물체에서 70% 이상의 무게를 차지하고 있다. 물은 매우 좋은 용매이므로 많은 종류의 물질들이 녹아들어 생명현상에 필요한 다양한 화학반응이 일어날 수 있는 화학용액(혼합액)이 된다. 소금쟁이가 물에 빠지지 않는 것은 소금쟁이가 물 표면에 가하는 압력보다 물의 표면장력이 클 뿐만 아니라, 다리에 약간의 기름기가 나와 물과 섞이지 않기 때문이다. 뿌리에서 흡수되는 물이 높은 곳에 존재하는 잎으로 올라가는 이유는 물의 강한 응집력 때문이다. 즉, 물은 수소결합에 의해 연결되어 있으므로 잎에서 물이 증발되어 떠나게 될 때, 그 아래쪽의 물 분자를 끌어올리게 된다. 호수에 사는 물고기가 추운 겨울에도 얼어 죽지 않는 것은 얼음의 밀도가 물보다 낮아 얼음이 떠 있기 때문이다. 즉, 물은 위에서부터 얼기 때문에 얼음 아래에는 액체 상태의 물이 존재할 뿐만 아니라, 물은 열용량이 커서 온도변화를 최소화시킬 수 있기 때문이다.

<문제 3>

정오각형의 한 변의 길이를 a, 한 대각선의 길이를 x라 하고 정오각형 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 의 두 대각선 P_1P_3와 P_2P_5의 교점을 M이라하자. 그러면 두 삼각형 $\triangle P_5P_1M$과 $\triangle P_1P_3P_4$는 두 밑각이 각각 $\frac{2\pi}{5}$, 꼭지각이 $\frac{\pi}{5}$인 이등변삼각형이므로 닮은 삼각형이다. 그러므로 닮음비에 의하여 $x : a = a : (x-a)$ 가 성립한다.

이로부터 2차방정식 $x^2 - ax - a^2 = 0$ 을 얻고, 근과 계수의 관계로부터

$x = \frac{(1 \pm \sqrt{5})a}{2}$ 이어야 하는데 대각선의 길이는 양수이므로 $x = \frac{(1+\sqrt{5})a}{2}$ 가 된다.

밑각이 $\frac{2\pi}{5}$인 이등변 삼각형 $\triangle P_1P_3P_4$의 꼭지점 P_1에서 변 P_3P_4에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 그러면 $\triangle P_1P_3Q$는 빗변의 길이가 $\frac{(1+\sqrt{5})a}{2}$, 밑변의 길이가 $\frac{a}{2}$인 직각삼각형이므로 $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\mathrm{a}/2}{(1+\sqrt{5})\mathrm{a}/2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 이 성립한다.

<문제 4>

(a) $n=2$인 경우:

$g(3) = f(2)g(2) + f(1)g(1) = g(2) + g(1)$ 이므로 성립

(b) $2 \le k \le n$ 인 k에 대하여 관계식 (3)이 성립한다고 가정하고 $k = n+1$일 때 관계식 (3)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} g(n+2) &= g(n+1) + g(n) \\ &= f(n)g(2) + f(n-1)g(1) + f(n-1)g(2) + f(n-2)g(1) \\ &= \{f(n) + f(n-1)\}g(2) + \{f(n-1) + f(n-2)\}g(1) \\ &= f(n+1)g(2) + f(n)g(1) \end{aligned}$$

그러므로 수학적 귀납법에 의하여 관계식 (3)은 모든 2보다 크거나 같은 자연수에 대하여 성립한다.

관계식 (4)로부터

$$\begin{cases} \Phi^n = f(n)\Phi + f(n-1) \\ (-1/\Phi)^n = f(n)(-1/\Phi) + f(n-1) \end{cases}$$

를 얻고 첫 번째식에서 두 번째 식을 빼면

$$\Phi^n - (-1/\Phi)^n = f(n)(\Phi + 1/\Phi)$$

가 된다. $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이면 $-1/\Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이므로 $\Phi + 1/\Phi = \sqrt{5}$ 이다. 따라서

$f(n) = \frac{((1+\sqrt{5})/2)^n - ((1-\sqrt{5})/2)^n}{\sqrt{5}}$ 가 성립한다.

<문제 5>

(다) 지문에서 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$를 정역으로 하는 탄젠트함수의 역함수를 Inv로 정의하였고, 탄젠트함수는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$와 실수전체의 집합간의 일대일대응관계를 준다. 따라서 관계식 (9)의 양변에 탄젠트함수를 취한 결과

$$\tan(\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n)})) = \tan(\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+1)}) + \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+2)}))$$

가 모든 양의 자연수에 대하여 성립함을 보이면 관계식 (9)가 증명된다.
관계식 (8)을 사용하여 위의 식을 정리하자. 그러면

$$\frac{1}{f(2n)} = \frac{1/f(2n+1) + 1/f(2n+2)}{1-(1/f(2n+1))(1/f(2n+2))} = \frac{f(2n+1)+f(2n+2)}{f(2n+1)f(2n+2)-1}$$

가 되고 이 식은

$$f(2n+1)f(2n+2)-1 = f(2n)f(2n+1) + f(2n)f(2n+2)$$

를 만족하는 것과 동치이다. 이를 정리하면

$$f(2n+1)\{f(2n+2)-f(2n)\}-1 = f(2n)f(2n+2)$$

가 되고 이로부터

$$f(2n+1)^2 - 1 = f(2n)f(2n+2)$$

를 얻는데 이는 관계식 (7)로부터 모든 자연수에 대하여 참이다.

관계식 (9)가 성립하므로 임의의 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \mathrm{Inv}(1) = \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2)}) = \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(3)}) + \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(4)}) \\ &= \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(3)}) + \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(5)}) + \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(6)}) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2k+1)}) + \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+2)})\end{aligned}$$

가 성립한다.
문제 4에서 구한 피보나치 수열의 일반항으로부터 $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$ 임을 알 수 있고 $\mathrm{Inv}(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+2)}) = \mathrm{Inv}(0) = 0$ 가 된다. 따라서

$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+1)})$ 이 성립한다.