성신여자대학교 2012학년도 수시

자연계열 모의논술문제

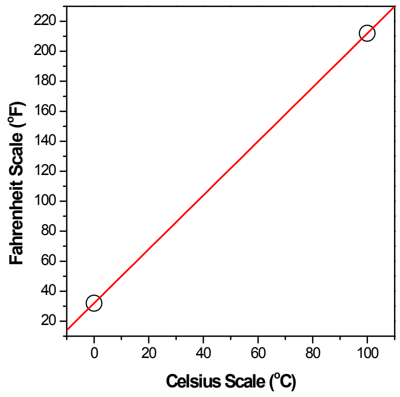
지원학과 :	수험번호 :	성명 :

[제시문 1]은 <문제 1>, <문제 2>에 해당하며, [제시문 2]는 <문제 3>, <문제 4>, <문제 5>에 해당합니다. 각 제시문은 일반적인 과학, 수학적 원리를 담고 있습니다. 제시문을 잘 읽고 그 내용에 근거하여 수식과 논리를 명확히 전개하여 답하시오.

[제시문 1]---

(가) 온도는 열역학적 성질의 하나로 에너지 흐름의 방향을 결정하는 기준이 된다. 온도 측정에 사용되는 척도는 다양하지만, 우리나라에서는 섭씨온도 (Celsius scale, °C), 미국에서는 화씨온도 (Fahrenheit scale, °F), 과학에서는 절대온도 (Kelvin scale, K)를 주로 사용한다. 또한 이러한 다양한 온도 측정 척도는 서로 환산이 가능하다.

섭씨온도는 지구상에서 가장 흔히 볼 수 있는 물질인 물(water)의 물리적 성질을 바탕으로 고안되었다. 1기압의 조건에서 얼음의 녹는점과 물의 끓는점을 기준점으로 하고, 이 두 기준점 사이를 100등분하여 얼음의 녹는점을 "0 °C", 물의 끓는점을 "100 °C"로 규정하여 온도를 측정하는 척도를 섭씨온도라고 한다. 이러한 섭씨온도는 다음과 같은 과정을 거쳐 화씨온도로 환산이 가능하다. 화씨온도에서는 얼음의 녹는점이 "32 °F"이며 물의 끓는점은 "212 °F"이기 때문에 옆에 표시한 그림과 같은 관계가 얻어진다. 즉, x축을 섭씨온도, y축을 화씨온도로 하는 1차 함수($y=ax+b$)로 표시할 수 있다. 그러므로 기울기 a (y의 변화량을 x의 변화량으로 나눈 것)와 y축 절편 b ($x=0$일 때 y값)를 구하면, 섭씨온도와 화씨온도의 환산은 아래와 같은 식으로 표현된다.

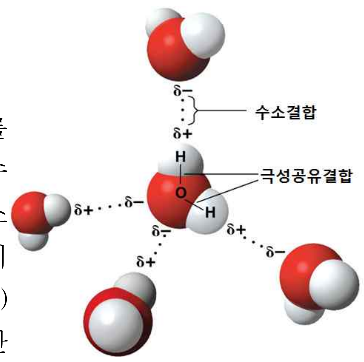


$$\text{화씨온도}(^oF) = \frac{9^oF}{5^oC} \times \text{섭씨온도}(^oC) + 32^oF$$

또한 절대온도는 샤를의 법칙(Charles's law)에 따라 이상기체의 부피가 "0"이 되는 온도로 다양한 조건에서 실험결과를 바탕으로 절대온도 "0 K"가 섭씨온도로 "-273.15 °C"라는 것을 알 수 있으며, 섭씨온도와 절대온도의 환산은 아래와 같은 식으로 표현된다.

$$\text{절대온도}(K) = \text{섭씨온도}(^oC) + 273.15K$$

(나) 과학자들은 새로운 행성을 발견하면, 그 행성에 물(water)이 존재한다는 증거를 찾고 싶어 한다. 왜냐하면 지구에 풍부하게 존재하는 물은 모든 생명현상을 뒷받침할 수 있는 독특한 특성을 가지고 있기 때문이다. 오른쪽 그림과 같이 물 분자는 두 개의 수소원자(H)가 한 개의 산소원자(O)에 공유결합으로 연결된 아주 간단한 구조로 V-형태를 이룬다. 물 분자의 산소원자는 약간의 음전하(δ^-)를 지니며 수소원자들은 약간의 양전하(δ^+)를 지니므로 물 분자는 극성분자이다. 그러므로 물 분자들은 음전하 산소원자와 인접한 물 분자의 양전하 수소원자와 사이에 약한 수소결합을 형성한다.



이러한 물 분자 사이의 수소결합으로 인해 물은 생명현상에 결정적인 몇 가지 중요한 특성을 나타낸다. 첫째, 물은 응집력을 보인다. 액체 상태인 물속에서 물 분자들은 인접한 분자들과 여러 개의 수소결합으로 연결되어 있어 응집력이 다른 액체들보다 크다. 이러한 응집력 때문에 물은 높은 표면장력을 가지고 있다. 그러므로 물은 눈에 보이지 않는 막으로 둘러싸인 것처럼 행동한다. 둘째, 물은 높은 열용량을 갖고 있다. 즉, 물은 다른 물질보다 온도를 올리는데 많은 열(에너지)을 필요로 한다. 그러므로 물은 주변의 온도가 높으면 열을 흡수하고 온도가 낮으면 열을 방출함으로써 온도를 일정하게 유지하는 역할을 할 수 있다. 또한 다른 대부분의 용매보다 물은 높은 녹는점, 끓는점, 기화열(액체가 기체로 될 때 필요한 열량) 등을 가지고 있다. 셋째, 물은 고체(얼음)일 때 물보다 낮은 밀도를 갖는다. 즉, 얼음은 물 위에 뜬다. 대부분의 물질은 얼게 되면 밀도가 증가하는데 (온도가 낮아지면 분자의 속도가 느려짐에 따라 효과적으로 밀집되어 부피가 줄어들기 때문에), 얼음이 되면 오히려 밀도가 감소하는 물의 특성은 유별난 것이다. 넷째, 물은 훌륭한 용매이다. 이온이나 극성을 띤 분자와 같이 전하를 지닌 물질은 물에 쉽게 녹아들어 간다. 이때 녹아들어간 물질을 용질이라 하며, 일단 녹으면 용질의 구성성분들은 물속에서 자유롭게 이동할 수 있다. 하지만 기름과 같이 비극성 분자는 전하를 전혀 지니지 않아 물에 녹지 않는다.

성신여자대학교 2012학년도 수시

자연계열 모의논술문제

< 문제 1 > 만일 지구가 아닌 다른 행성(Z)에서 가장 흔한 물질이 염소이고 1기압의 조건에서 염소의 녹는점(0 °Z)과 끓는점(133 °Z)을 기준으로 온도측정 척도(Z-scale)를 사용한다고 가정하자. 아래 참고 자료를 이용하여 이 행성에서 온도측정 척도(Z-scale)를 절대온도로 환산하는 식을 구하고, 이 행성의 평균온도가 300 °Z일 때 이 온도를 섭씨온도 단위로 나타내시오.

[참고자료]
1기압에서 염소의 녹는점: -101.0 ℃
1기압에서 염소의 끓는점: -34.5 ℃

< 문제 2 > 지구상의 모든 생명체들은 살아가기 위해 반드시 액체 상태의 물을 필요로 한다. 예를 들어 물질대사 (에너지를 얻기 위한 물질의 분해, 생명체에 필요한 물질의 합성 등을 포함하는 세포 내의 모든 화학적 반응의 총합)에 액체인 물이 필요하다. 그 외에도 소금쟁이가 물에 빠지지 않고 물 위를 걷거나, 식물이 중력을 이겨내고 높은 가지의 잎에 물을 수송하거나, 호수에 사는 물고기가 추운 겨울에도 얼어 죽지 않는다. 이와 같은 각각의 현상들에 대한 이유를 제시문에 설명된 물의 특성에 근거하여 논리적으로 설명하시오.

[제시문 2]---

(가) 자연계에는 다양한 형태의 규칙성이 존재한다. 이러한 규칙성의 아름다움을 발견한 갈릴레오는 “우주는 수학이라는 언어로 창조되었다”고 이야기하였다. 앵무조개의 나선구조, 해바라기 씨앗의 배열 및 솔방울과 파인애플 껍질의 무늬에는 일정한 규칙성이 존재하며 이와 같은 규칙성을 황금비와 피보나치 수열의 관점에서 관찰한 여러 결과들이 제시되었다. 이러한 수학적 규칙성이 주는 아름다움은 인간의 창작물에도 다양한 형태로 반영되었는데 파르테논 신전, 플로렌즈의 돔, 석굴암, 모나리자 등 여러 아름다운 건축물과 미술 작품의 비례와 균형, 그리고 우리가 일상적으로 접하는 책이나 신문 용지의 가로 세로 비와 여백에 이르기까지 다양한 곳에 활용되고 있다.

이제 황금비에 대하여 정의를 하자. 주어진 선분 AB위의 한 점 C를 잡고 이 점에 의하여 나누어지는 두 선분 AC, CB 중 AC의 길이가 더 길다고 가정하자. $AB:AC=AC:CB$ 를 만족하게 선분이 분할되었을 때, 이 선분은 점 C에 의하여 황금분할 되었다고 한다. 이러한 정의는 유클리드의 원론 제2권의 열한 번째 정리와 관계되는데 이는 ‘길이가 L인 선분을 $L \cdot L_2 = L_1 \cdot L_1$을 만족하는 길이가 각각 L_1, L_2인 두 선분으로 분할할 때, 이 분할이 황금분할이다.’ 로 이해할 수 있다. 따라서 황금분할은 $L \cdot (L-L_1) = L_1 \cdot L_1$ 을 만족하므로

$$L^2 - L_1 \cdot L - L_1^2 = 0 \qquad \text{-----------(1)}$$

이고 이로부터 $L : L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$ 를 얻는다.

이와 같은 길이의 비는 정오각형의 대각선의 길이와 변의 길이의 비에서도 얻어진다. 한 변의 길이가 양수 a인 정 오각형 $P_1P_2P_3P_4P_5$를 생각하자. 그러면 삼각형 $\triangle P_1P_3P_4$ 는 밑각의 크기가 $\frac{2\pi}{5}$인 이등변삼각형이 된다. 이런 성질을 갖는 이등변삼각형을 황금삼각형이라 한다.
정오각형의 두 대각선 P_1P_3와 P_2P_5의 교점을 M이라 하면 $\triangle P_5P_1M$도 황금삼각형이 되고 따라서 $\triangle P_1P_3P_4$ 와 $\triangle P_5P_1M$은 닮은 삼각형이다. 이로부터 삼각형 $\triangle P_1P_3P_4$의 옆변과 밑변의 길이의 비는 $P_1P_3 : P_3P_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$ 가 됨을 보일 수 있다.

자연계열 모의논술문제

(나) 황금비는 수학의 여러 분야에서 나타나는데 그 중 한 가지 재미있는 주제는 피보나치 수열과의 관계이다. 피보나치 수열은 다음과 같은 피보나치의 토끼 문제로 잘 알려져 있다.

'첫 달에는 새로 태어난 토끼 한 쌍만 존재한다. 두 달 이상 된 토끼의 쌍은 매달 한 쌍의 새끼를 낳고 모든 토끼의 쌍은 절대 죽지 않는다고 가정한다. 그러면 n번째 달에는 몇 쌍의 토끼가 있을까?'

n번째 달의 토끼의 쌍의 수를 $f(n)$이라 하면

$$\begin{cases} f(1)=1,\ f(2)=1 \\ f(n)=f(n-1)+f(n-2),\ n\geq 3 \end{cases} \qquad \text{----------(2)}$$

인 점화식을 만족한다. 이와 같은 수열을 피보나치 수열이라 한다. 그러면 피보나치 수열의 일반항은 어떻게 구할 수 있을까?

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 하나의 해를 Φ라 하고, $g(n)=\Phi^n$ (n은 자연수)로 정의된 수열을 생각하자. 그러면 $\Phi^2=\Phi+1$이므로 $g(n+2)=\Phi^{n+2}=\Phi^n\cdot(\Phi+1)=g(n+1)+g(n)$ 이 된다. 이제 수열 $g(n)$과 $f(n)$의 관계를 살펴보자. 수학적 귀납법을 사용하면 2보다 크거나 같은 자연수 n에 대하여

$$g(n+1)=f(n)g(2)+f(n-1)g(1) \qquad \text{----------(3)}$$

이 성립함을 보일 수 있다.

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 한 근이 Φ이면 근과 계수의 관계에 의하여 다른 한 근은 $-1/\Phi$이 된다. 이 결과를 위에서 얻은 관계식 (3)에 대입하면 두 식

$$\begin{cases} \Phi^{n+1}=f(n)\Phi^2+f(n-1)\Phi \\ (-1/\Phi)^{n+1}=f(n)(-1/\Phi)^2+f(n-1)(-1/\Phi) \end{cases} \qquad \text{----(4)}$$

를 얻는다. 이로부터 피보나치 수열의 일반항은 $f(n)=\dfrac{((1+\sqrt{5})/2)^n-((1-\sqrt{5})/2)^n}{\sqrt{5}}$ 가 됨을 알 수 있다.

(다) 지름이 1인 원의 둘레 길이를 π로 정의하고 이를 원주율이라 한다. 원주율의 근사값을 원하는 정확도로 계산하는 것은 실생활에서 매우 중요하다. 그러면 π의 근사값을 어떻게 구할 수 있는지 살펴보자.

탄젠트함수 $\tan:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to(-\infty,\infty)$, $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$는 연속함수이고 일대일대응관계이므로 연속인 역함수 $\mathrm{Inv}:(-\infty,+\infty)\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 를 갖는다. 예로 $\tan(\frac{\pi}{4})=1$ 이므로 $\mathrm{Inv}(1)=\frac{\pi}{4}$이다. 초항이 1이고 공비가 $-x^2$인 무한 등비수열의 합은 $-1<x<1$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$ 로 주어진다. 미적분학의 발달로 17세기에는 이 함수의 좌변과 우변을 각각 적분하여 $-1<x\leq 1$인 범위에서 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}=\mathrm{Inv}(x)$가 성립함을 발견하였다. 이 식에 $x=1$을 대입하면 $\displaystyle\frac{\pi}{4}=\mathrm{Inv}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 가 되고 이로부터 원주율의 근사값이 계산된다.

만일 $\mathrm{Inv}(1)=\mathrm{Inv}(\frac{1}{a})+\mathrm{Inv}(\frac{1}{b})$로 표현할 수 있는 1보다 큰 자연수의 쌍 (a,b)를 찾을 수 있으면 우리는 원주율의 근사값을 훨씬 빨리 원하는 정밀도로 계산할 수 있게 된다. 이러한 성질을 만족하는 자연수의 쌍은 어떻게 구할 수 있을까?

성신여자대학교 2012학년도 수시

자연계열 모의논술문제

18세기에 오일러(Euler)는

$$\mathrm{Inv}(\frac{1}{2})+\mathrm{Inv}(\frac{1}{3})=\mathrm{Inv}(1) \qquad \text{----------(5)}$$

이 성립함을 발견하였는데 이는 좌표평면위에 놓인 다섯 개의 점 $O=(0,0)$, $A=(2,1)$, $B=(3,-1)$, $C=(2,0)$, $D=(3,0)$과 이로부터 얻어지는 3개의 직각 삼각형 $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBD$로부터 증명된다.

이제 이 관계식을 좀 더 일반화하자. 관계식 (2)에 제시된 피보나치 수열의 점화식을 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} f(2) \\ f(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 이고 } \begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix},\quad n \ge 1 \quad .\text{-----(6)}$$

$f(0)=0$으로 정의하면 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix} f(n+1) & f(n) \\ f(n) & f(n-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ 이 성립하고 행렬의 성질로부터

$$f(n+1)f(n-1)-f(n)^2=(-1)^n \qquad \text{----------(7)}$$

을 얻는다.

탄젠트 함수의 각의 합에 대한 공식은 다음과 같이 주어진다.

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \text{----------(8)}$$

위의 두 식 (7)과 (8)을 사용하면 다음 식이 얻어진다.

$$\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n)})=\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+1)})+\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+2)}) \qquad \text{----------(9)}$$

따라서 $\mathrm{Inv}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+1)})$ 로 표현되고 이로부터 원주율과 피보나치 수열간의 관계 $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+1)})$가 성립함을 볼 수 있다.

---

* 위의 각 지문에 주어진 공식은 그에 대한 증명을 요구하는 문제가 아니라면 문제 풀이 과정에 아무 제약 없이 사용할 수 있습니다.

<문제 3> (가) 지문의 논의로부터 한 변의 길이가 a인 정오각형의 한 대각선의 길이는 $\frac{(1+\sqrt{5})a}{2}$가 됨을 보이고 이로부터 $\sin(\frac{2\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 임을 보이시오.

<문제 4> 수학적 귀납법을 이용하여 (나) 지문의 관계식 (3)이 성립함을 보이고, (나) 지문의 논의를 이용하여 피보나치 수열의 일반항은

$$f(n)=\frac{((1+\sqrt{5})/2)^n-((1-\sqrt{5})/2)^n}{\sqrt{5}}$$

이 됨을 보이시오.

<문제 5> (다) 지문의 식 $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Inv}(\frac{1}{f(2n+1)})$ 이 성립함을 다음 각 단계를 증명함으로써 보이시오.

(a) 관계식 (7)과 탄젠트함수의 각의 합에 관한 공식 (8)로부터 관계식 (9)가 얻어짐을 보인다. (tan와 Inv은 역함수관계임을 이용)

(b) 무한급수의 극한이 급수의 부분합의 극한으로 정의됨을 이용하여 결론을 유도한다.