SUNGSHIN UNIVERSITY

2012학년도

자연계열

- 논술문제
- 출제의도 및 문제해설
- 평가기준표
- 학생답안

2012학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 논술문제

지원학과 :	수험번호 :	성명 :

[제시문 1]은 〈문제 1〉, 〈문제 2〉에 해당하며, [제시문 2]는 〈문제 3〉, 〈문제 4〉, 〈문제 5〉에 해당합니다. 각 제시문은 일반적인 과학, 수학적 원리를 담고 있습니다. 제시문을 잘 읽고 그 내용에 근거하여 수식과 논리를 명확히 전개하여 답하시오.

제시문 1

(가) 현대사회에서 가장 심각하게 대두되는 문제 중 하나는 공해물질의 증가와 에너지 자원의 고갈이다. 산업혁명 이후 현재까지 가장 보편적으로 사용되어 온 에너지원은 화석연료이고, 에너지를 얻기 위한 화석연료의 연소는 여러 가지 환경 오염물질의 생산, 온실효과를 일으키는 이산화탄소의 생성 등 환경에 직접적인 악영향을 미친다. 이러한 악영향을 줄이기 위해 오염물질을 발생시키지 않고 자연으로부터 얻을 수 있는 신재생에너지(renewable energy)의 생산과 사용에 많은 관심이 모아지고 있다. 신재생에너지는 풍력, 지열, 태양열, 수력 발전과 같이 자연으로부터 얻을 수 있는 에너지를 의미하며, 친환경적인 에너지이다. 그러나 이러한 형태의 발전(전기의 생산)은 간헐적이기 때문에 지속적인 전기공급을 위해 충전과 방전이 가능한 2차전지를 포함시킨 총괄적인 시스템을 사용한다. 예를 들면, 풍력 발전의 경우 바람이 불 때만 발전이 가능하여, 바람이 불지 않는 경우는 전기를 생산할 수 없어 간헐적인 발전이 되지만, 전기를 저장할 수 있는 2차전지를 사용하면 바람이 많이 부는 경우에는 (발전량 〉 사용량) 전기를 저장하고, 반대의 경우는 (발전량 〈 사용량) 2차전지에 저장된 전기에너지를 사용하게 된다. 현재 가장 보편적인 2차전지인 리튬전지(lithium battery)는 휴대용 전자기기 등 다양한 기기 및 장비의 전원으로 사용되고 있다. 리튬전지의 기본 원리는 리튬 혹은 리튬을 포함하는 화합물에서 리튬의 산화와 환원반응을 통해 얻어지는 전자로부터 전기에너지를 생산하는 것이다. 방전의 경우, 음극에서 리튬의 산화반응 ($Li \rightarrow Li^{+} + e^{-}$)을 통해 얻어진 전자는 외부 회로를 통해 흐르게 되고, 이러한 전자들은 양극에서 리튬이온의 환원반응 ($Li^{+} + e^{-} \rightarrow Li$)에 참여하게 된다. 이러한 반응들은 자발적으로 진행되어 전기를 생산한다. 그러나 리튬전지 내의 저장된 전기량이 충분하지 않은 경우, 우리는 충전기를 사용하여 리튬전지를 충전하게 된다. 이렇게 충전을 하면 양극에 있던 리튬은 음극으로 이동하여 다시 방전할 수 있는 상태, 즉 전기에너지가 저장된 상태가 된다.

(나) 2차전지의 용량은 전지의 내부 구성 물질의 양에 따라 결정된다. 현재 인기 있는 테블릿 PC에 사용되는 2차전지의 용량은 $7000\,mA \cdot h$이다. 전류는 전자의 흐름으로, $1\,C$(쿨롱)의 전하가 1초 동안 흐른 양을 $1\,A$(암페어)로 정의한다. 그러므로 2차전지에 사용하는 물질이 리튬인 경우, $7000\,mA \cdot h$용량의 전지를 만들기 위해 필요한 리튬의 질량은 다음과 같이 구할 수 있다. (이 전지가 이상적으로 작동한다고 가정하자.) $1\,mol$(몰)의 리튬은 $1\,mol$의 전자를 생성한다. 그러므로 전지에 사용되는 리튬의 양은 리튬전지의 전하량을 전자 $1\,mol$의 전하량인 $96500\,C/mol$ ($Faraday$ 상수)로 나누어 구할 수 있다. 이에 대한 수학적 표현은 다음과 같다.

$$\text{전하량}: Q = 7000\,mA \cdot h \times \frac{1\,A}{1000\,mA} \times \frac{3600\,s}{1\,h} = 25200\,A \cdot s \times \frac{1\,C}{1\,A \cdot s} = 25200\,C$$

$$\text{리튬 및 전자의 몰 수}: n(e^{-}) = n(Li) = \frac{Q}{Faraday\,\text{상수}} = \frac{25200\,C}{96500\,C/mol} = 0.2610\,mol$$

$$\text{리튬의 질량}: m(Li) = 0.2610\,mol \times 7\,g/mol = 1.83\,g$$

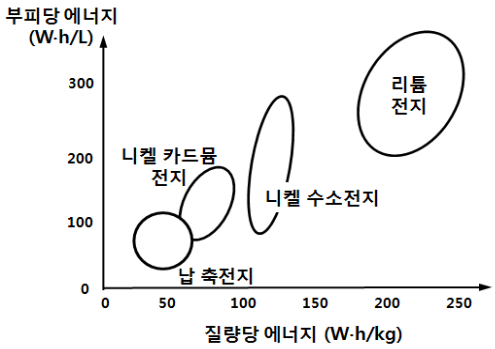
즉, $7000mA \cdot h$용량의 2차전지를 만들기 위해 $1.83g$의 리튬이 필요하다.
반면, 리튬대신 아연 ($Zn \rightleftarrows Zn^{2+}+2e^{-}$)을 사용한다면, 다음과 같이 구할 수 있다.

아연 및 전자의 몰 수 : $n(e^{-})=\dfrac{n(Zn)}{2}=\dfrac{Q}{2\times Faraday\text{상수}}=\dfrac{25200\,C}{2\times 96500\,C/mol}=0.1305\,mol$

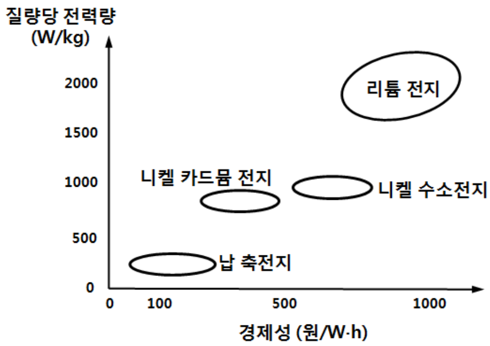
아연의 질량 : $m(Zn)=0.1305\,mol\times 65.38g/mol=8.54\,g$

그러므로 $7000mA \cdot h$ 용량의 2차전지를 만들기 위해 $8.54g$의 아연이 필요하다.

위와 같이 단위 용량 당 질량은 사용하는 물질마다 다르게 된다. 2차전지의 용량이 작으면 전력 소비가 큰 전기자동차와 같은 기기에는 사용하기 어렵기 때문에, 대용량을 필요로 하는 기기에 사용 가능한 2차전지를 개발하기 위한 연구가 활발히 진행 중이다. 일례로, 전기자동차에 사용되는 리튬전지는 태블릿 PC와는 달리 더 많은 리튬을 포함한 훨씬 더 큰 용량의 전지를 필요로 하기 때문에, 실제 상용화에 적합한 경량화, 소형화, 고성능화의 측면을 고려하여 개발되어야 한다.



〈그림 1〉 2차전지의 에너지 밀도 비교



〈그림 2〉 2차전지의 전력 밀도와 경제성 비교

【문제 1】
최근 성능을 향상시킨 하이브리드 형태의 전기자동차에 사용되는 리튬전지의 용량은 $16kW \cdot h$이다. 전지가 이상적으로 작동한다는 가정 하에 이 용량을 나타내기 위해 필요한 리튬의 질량을 구하시오.
(단, 이 리튬전지의 전압은 $4.0\,V$로 일정하다. 전력은 1초 동안 일을 할 수 있는 능력으로 단위는 와트(W)이다. $1\,W=1J/s=1C\cdot V/s$임을 참고하시오. ※ 계산의 편의를 위해 Faraday 상수는 $96000C/mol$로 계산하시오.)

【문제 2】
제시문에 설명된 내용 및 〈그림 1〉과 〈그림 2〉에 근거하여 리튬전지의 장점과 단점을 설명하시오. 그리고 리튬전지가 전기자동차용 전지로 가장 유력한 후보인 이유를 논리적으로 설명하시오.

제시문 2

(가) 평행이동과 일차변환

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 $x'=x+a,\ \ y'=y+b$를 만족하는 점 $\mathrm{P}'(x',y')$로 보내는 함수관계

$$f:(x,y)\rightarrow(x+a,\ \ y+b)$$

를 평행이동이라 하고 이를 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

가 된다. 또한 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 $x'=ax+by,\ \ y'=cx+dy$를 만족하는 점 $\mathrm{P}'(x',y')$로 보내는 함수관계

$$g:(x,y)\rightarrow(ax+by,\ \ cx+dy)$$

를 일차변환이라 하고, 이의 행렬 표현은

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

가 된다. 따라서 좌표평면의 일차변환은 행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에 의해 완전히 결정된다. 일차변환에 해당하는 행렬의 예는 x축에 대한 대칭변환인 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, y축에 대한 대칭변환인 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $y=x$로 주어진 직선에 대한 대칭변환인 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 그리고 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 원점을 중심으로 반시계방향으로 θ만큼 회전하는 회전변환인 $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 등이 있다.

(나) 이차곡선

공간에서 $z^2=x^2+y^2$ 을 만족하는 점들의 집합을 원뿔면이라 한다. 이 원뿔면은 xz평면 위의 직선 $z=x$를 z축 둘레로 회전하여 얻어지는 회전체이고, 이것의 모양은 두 원뿔의 꼭짓점을 맞붙여 놓은 형태이다.

공간에서 원뿔면과 평면의 교집합으로 주어지는 곡선은 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등이 될 수 있다. 예를 들어 살펴보자. 원뿔면과 평면 $z=4$와의 교집합은 $4^2=x^2+y^2$이 되고 이는 반지름이 4인 원이다. 또한 원뿔면과 평면 $y=1$과의 교집합은 $z^2-x^2=1$이므로 쌍곡선이 된다.

이제 좀 더 일반적인 형태의 평면과 원뿔면의 교집합을 살펴보자. 임의의 실수 a에 대하여 $z=ax+1$로 정의된 평면과 원뿔면의 교집합은 $(ax+1)^2=x^2+y^2$으로 주어진다. 이로부터 이차방정식

$$(a^2-1)x^2+2ax-y^2+1=0 \qquad \text{-----(1)}$$

을 얻고 이 식을 정리하면 $a^2-1=0$ 일 경우는 $y^2=2ax+1$ 이 되고, $a^2-1\neq 0$ 이면

$$(a^2-1)\left(x+\frac{a}{a^2-1}\right)^2-y^2=\frac{1}{a^2-1}$$

이 된다. 따라서 a의 값에 따라 이 곡선은 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 될 수 있다.

이와 같이 원뿔면과 평면의 교집합으로 나타나는 원, 타원, 포물선, 쌍곡선을 원뿔곡선 또는 이차곡선이라 한다. 이러한 곡선은 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ 중 적어도 하나는 0이 아닌 일반적인 이차방정식

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}xy+\mathrm{C}y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0 \qquad \text{-----(2)}$$

의 해집합으로 주어진다. 위의 식을 행렬을 사용한 식으로 표현하면

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}/2\\\mathrm{B}/2&\mathrm{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(\mathrm{D}\ \ \mathrm{E})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\mathrm{F}=0 \qquad \text{-----(3)}$$

이 된다. 만일 $\mathrm{B}\neq 0$이면 이 식을

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \qquad \text{-----(4)}$$

로 주어지는 회전변환을 통하여

$$\mathrm{A}'x'^2+\mathrm{C}'y'^2+\mathrm{D}'x'+\mathrm{E}'y'+\mathrm{F}'=0 \qquad \text{-----(5)}$$

형태의 식으로 변환시킬 수 있다. (5)의 A', C', D', E', F'를 (2)의 A, B, C, D, E, F로부터 구하는 방법은 다음 과정에서 찾을 수 있다.
(4)는

$$(x\ y) = (x'\ y')\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{-----(6)}$$

로 표현할 수 있고 (4)와 (6)을 (3)에 대입하면

$$(x'\ y')\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (D\ E)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0 \qquad \text{----(7)}$$

이 된다.

$$\begin{pmatrix} A' & B'/2 \\ B'/2 & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ (D'\ E') = (D\ E)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ F' = F$$라 하자.

그러면

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A\cos^2\theta + C\sin^2\theta + B\sin\theta\cos\theta & (C-A)\sin\theta\cos\theta + (B/2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ (C-A)\sin\theta\cos\theta + (B/2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) & A\sin^2\theta + C\cos^2\theta - B\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

이므로

$$(C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta = 0 \qquad \text{-----(8)}$$

이 되는 θ를 선택하면 $B' = 0$이 된다. 이 때 (7)은

$$(x'\ y')\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (D'\ E')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F' = 0$$

가 되고, 이는 (5)가 된다.

【문제 3】

(1)로부터 원뿔면 $z^2 = x^2 + y^2$과 평면 $z = ax + 1$의 교집합이 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 되는 a의 범위를 각각 구하시오.

【문제 4】

위 제시문에 나타난 (2)에서 (8)까지의 과정을 통하여 이차방정식 $2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy - 8 = 0$을 (5)의 형태로 변환하고, 변환된 식의 그래프를 좌표평면에 그리시오. (단, $-\frac{\pi}{4} < \theta \le \frac{\pi}{4}$ 라 가정한다.)

【문제 5】

정적분을 이용하여 일반적인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0, b > 0, a \ne b)$의 면적이 $ab\pi$임을 보이고, 이차곡선 $2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy - 8 = 0$으로 둘러싸인 영역의 면적을 〈문제 4〉의 결과를 이용하여 구하시오.
(참고: 평행이동이나 회전변환에 의하여 얻어진 도형의 면적은 변환 전 도형의 면적과 같다.)

2012학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 출제의도 및 문제해설

출제 의도

본교의 2012학년도 수시 1차모집 자연계 논술고사는 고등학교 과정을 이수한 학생이 제시문을 읽고 이해한 후 이를 바탕으로 해결할 수 있는 문제들을 다루고 있다. 주어진 제시문 분석을 통해 수학적 기본 개념과 과학적 원리를 이해하고, 이를 바탕으로 개념과 원리를 적용하여 현상 및 도표를 분석하는 능력과 논리적으로 설명하는 능력을 평가하는 것이 본 논술고사의 출제의도이다.

[제시문 1]은 현재 가장 보편적으로 사용하는 2차전지인 리튬전지의 기본 개념 및 화학 반응을 이해하고, 이를 바탕으로 전지 내부의 미시적인 변화를 구하는 문제와 리튬전지의 특성 및 이에 대한 그래프의 해석을 통해 전기 자동차용 2차전지로 리튬전지가 가장 유력한 이유에 대한 추론 능력을 평가하는 문제이다.

[제시문 2]는 고등학교 기하와 벡터 영역의 주요 주제인 일차변환과 평행이동, 그리고 이차곡선에 대한 것이다. 제시문에서는 원뿔면을 정의하고 공간에 놓여있는 원뿔면과 평면의 교집합으로 생기는 곡선으로 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 나타날 수 있음을 보여주었다. 그리고 일반적인 이차곡선을 회전변환을 통해 우리가 흔히 접하는 원, 타원, 포물선, 쌍곡선의 방정식으로 변환시킬 수 있는 능력이 있는지를 알아보기 위해 출제하였다. 또한 회전변환이 면적을 보존하는 함수란 사실을 이용해 표준형태가 아닌 타원을 표준형태의 타원으로 변환하여 면적을 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

문제해설

【문제 1 풀이】

리튬전지에 필요한 리튬의 질량을 구하기 위해서는 그 용량에 해당하는 전자의 몰 수를 먼저 구하고, 생성되는 전자와 반응하는 리튬의 몰 수와의 관계식을 화학 반응식으로부터 알아낸 후, 이를 이용하여 리튬의 질량을 계산한다.

먼저 전력량으로부터 전하량을 구하기 위해 다음과 같이 계산한다.

$$\text{전력}, P = 16kW\bullet h \times \frac{1{,}000\,W\bullet h}{1kW\bullet h} = 16{,}000\,W\bullet h \times \frac{3{,}600s}{1h} = 57{,}600{,}000\,W\bullet s$$

$$\text{전하량}, Q = \frac{57{,}600{,}000\,W\bullet s}{4.0\,V} = 14{,}400{,}000\,C$$

전하량은 생성된 전자의 양에 비례하므로 얻어진 전하량을 Faraday 상수 (전자 $1mol$의 전하량)로 나누어 주면 생성된 전자의 몰 수를 얻을 수 있다. 리튬 원자 1개는 산화반응을 통해 전자 1개를 생성하므로 생성되는 전자의 몰 수와 반응에 소모되는 리튬의 몰 수는 동일하다. 또한 $Faraday$ 상수를 $96{,}000C/mol$로 가정했으므로 리튬과 전자의 몰 수는 다음과 같다.

$$\text{리튬 및 전자의 몰 수}, n(e^-) = n(Li) = \frac{Q}{Faraday\,\text{상수}} = \frac{14{,}400{,}000\,C}{96{,}000\,C/mol} = 150\,mol$$

얻어진 리튬의 몰 수에 제시문의 리튬 원자량 $7g/mol$을 곱하면 반응에 참여하는 리튬의 질량을 결정할 수 있다.

$$\text{리튬의 질량}, m(Li) = 150\,mol \times 7\,g/mol = 1{,}050\,g$$

따라서, $16kW\bullet h$의 용량을 갖는 리튬전지 (전압 $=4.0\,V$)에 필요한 리튬의 양은 $1{,}050g\,(1.050kg)$이다.

【문제 2 풀이】

[제시문 1]의 내용과 〈그림 1〉 및 〈그림 2〉를 해석하여 리튬전지의 장점과 단점을 정리하고, 이를 바탕으로 전기자동차용 전지로 리튬전지가 적합하다는 타당한 이유를 제시하면 된다.

현재 가장 많이 사용되는 2차전지인 리튬전지는 제시문과 그림에서 보인 것처럼 에너지 밀도가 높은 장점이 있는 반면 단위 에너지 당 가격이 높다는 단점이 있다.

〈그림 1〉에 나타난 바와 같이 전지의 질량당 에너지를 비교하면 납축전지의 경우 $1kg$당 저장할 수 있는 에너지의 양이 약 $50\,W \cdot h$인데 비해 리튬전지는 $200\,W \cdot h$이상의 높은 에너지를 저장할 수 있다. 또한 전지의 부피당 에너지를 비교하면 납축전지의 경우 $1L$당 저장할 수 있는 에너지의 양이 약 $50\,W \cdot h$인데 비해 리튬전지는 약 $300\,W \cdot h$의 에너지를 저장할 수 있기 때문에 단위질량 그리고 단위 부피 당 에너지는 납축전지 등 다른 종류의 2차전지에 비해 월등히 높은 것을 알 수 있다. 이와 같은 현상의 원인은 제시문에 보인 리튬과 아연의 비교 결과에서처럼 리튬이 고체 원소 중 가장 가벼운 원소이기 때문에 단위 질량 당 그리고 단위 부피 당 에너지가 다른 2차전지에 비해 상당히 높은 것임을 알 수 있다. 또한 질량 당 전력량을 비교하면 〈그림 2〉에 나타난 바와 같이 납축전지는 약 $200\,W/kg$, 리튬전지는 $1{,}500\,W/kg$이상이므로 리튬전지의 질량 당 전력량이 높다. 반면, 〈그림 2〉에 나타난 바와 같이 경제성 측면에서는 다른 2차전지에 비해 단위 에너지 당 높은 가격을 보인다. 전기자동차용 전지의 상용화를 위해서는 경량화, 소형화, 고성능화, 경제성 등이 주요한 요인이 되는데, 앞서 언급한 바와 같이 리튬은 가장 가벼운 금속원소로 산화환원 반응이 가능하기 때문에 단위 질량 당, 단위 부피 당 에너지 밀도가 크다. 전기자동차용 전지로 경량화, 소형화, 고성능화가 훨씬 더 중요하므로 리튬전지가 다른 2차전지에 비해 다소 경제성이 낮더라도 전기자동차용 전지로 가장 유력한 후보이다.

【문제 3 풀이】

임의의 실수 a에 대하여 $z^2=x^2+y^2$으로 정의된 원뿔면과 $z=ax+1$로 정의된 평면의 교집합은 $(ax+1)^2=x^2+y^2$으로 주어진다. 이로부터 이차방정식

$$(a^2-1)x^2+2ax-y^2+1=0$$

을 얻고 이 식을 정리하면 $a^2-1=0$ 일 경우는 $y^2=2ax+1$ 이 되고, $a^2-1\neq 0$ 이면

$$(a^2-1)\left(x+\frac{a}{a^2-1}\right)^2-y^2=\frac{1}{a^2-1}$$

이 된다. 그러므로 $z^2=x^2+y^2$으로 정의된 원뿔면과 $z=ax+1$의 교집합으로 주어지는 곡선의 형태는 다음 4가지로 분류된다.

가) $a^2-1=0$인 경우 ($a=1$ 또는 $a=-1$):

$y^2=2ax+1$이므로 포물선이 된다.

나) $a^2-1\neq 0$인 경우:

1) $a^2-1=-1$인 경우 ($a=0$):

$x^2+y^2=1$이 되므로 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 1인 원이 된다. (원의 방정식: $x^2+y^2=r^2$)

2) $a^2-1<0$ 이고 $a^2-1\neq -1$ 인 경우 ($-1<a<0$ 또는 $0<a<1$):

$$\frac{\left(x-\frac{a}{1-a^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2}=1$$을 만족하므로 타원이 된다.

(타원의 방정식: $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,\ A>0, B>0, A\neq B$)

3) $a^2-1>0$인 경우 ($a>1$ 또는 $a<-1$):

$$\frac{(x+\frac{a}{a^2-1})^2}{(\frac{1}{a^2-1})^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{a^2-1}})^2}=1\text{이 되므로 쌍곡선이 된다.}$$

(쌍곡선의 방정식: $\frac{x^2}{\mathrm{A}^2}-\frac{y^2}{\mathrm{B}^2}=\pm 1$)

따라서 $a=0$이면 원, $a=1$ 또는 $a=-1$이면 포물선, $-1<a<0$ 또는 $0<a<1$이면 타원, $a>1$ 또는 $a<-1$이면 쌍곡선이 된다.

【문제 4 풀이】

제시문의 내용을 사용하여 $2x^2+y^2+\sqrt{3}xy-8=0$을 $\mathrm{A}'x'^2+\mathrm{C}'y'^2+\mathrm{D}'x'+\mathrm{E}'y'+\mathrm{F}'=0$의 형태로 변환시키자. $\mathrm{A}=2$, $\mathrm{B}=\sqrt{3}$, $\mathrm{C}=1$, $\mathrm{D}=0$, $\mathrm{E}=0$, $\mathrm{F}=-8$이므로

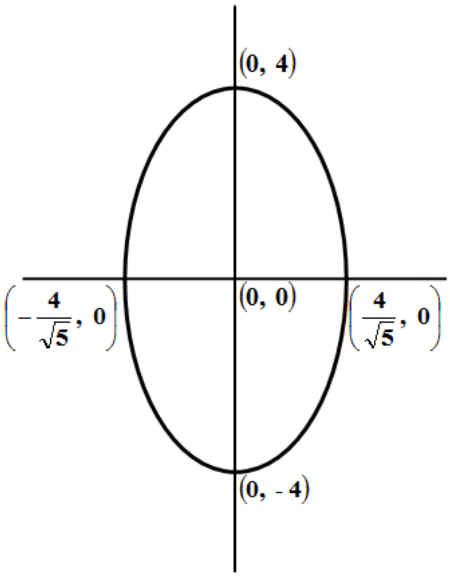
$$(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin2\theta+\mathrm{B}\cos2\theta=(1-2)\sin2\theta+\sqrt{3}\cos2\theta$$

가 되고, 이 식을 0이 되게 하는 θ는 $\sqrt{3}\cos2\theta=\sin2\theta$를 만족한다. 따라서 $\tan2\theta=\sqrt{3}$이 되고, $-\frac{\pi}{4}<\theta\le\frac{\pi}{4}$라고 가정하였으므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$이고 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$이다.

제시문의 계산식으로부터

$$\begin{aligned}\mathrm{A}' &= \mathrm{A}\cos^2\theta+\mathrm{C}\sin^2\theta+\mathrm{B}\sin\theta\cos\theta,\\ \mathrm{B}'/2 &= (\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin\theta\cos\theta+(\mathrm{B}/2)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{2}\{(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin2\theta+\mathrm{B}\cos2\theta\},\\ \mathrm{C}' &= \mathrm{A}\sin^2\theta+\mathrm{C}\cos^2\theta-\mathrm{B}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

임을 알 수 있으므로 계산하면 $\mathrm{A}'=\frac{5}{2}$, $\mathrm{B}'=0$, $\mathrm{C}'=\frac{1}{2}$, $\mathrm{D}'=0$, $\mathrm{E}'=0$, $\mathrm{F}'=-8$이 된다. 이로부터 $\frac{5}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2-8=0$을 얻고, 이를 정리하면 일반적인 타원의 방정식 $\frac{(x')^2}{(4/\sqrt{5})^2}+\frac{(y')^2}{4^2}=1$을 얻는다. 이 타원의 초점은 $\mathrm{F}(0,\pm\frac{8}{\sqrt{5}})$, 꼭짓점은 $(\pm\frac{4}{\sqrt{5}},0)$, $(0,\pm4)$ 그리고 장축은 y축과 일치하고 그래프는 아래 그림과 같다.



【문제 5 풀이】

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$의 면적은 두 곡선 $y=b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$과 $y=-b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$ 으로 둘러싸인 면적과 같다. 따라서 타원의 면적은

$$\int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\,dx$$

로 주어지고 $t=\frac{x}{a}$라 하면 $dx=a\,dt$ 이므로 $\int_{-1}^{1} 2ab\sqrt{1-t^2}\,dt$가 된다.

반지름이 1인 반원의 면적을 구하는 적분식으로부터 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}$가 되므로 타원의 면적은 $ab\pi$이다.

〈문제 4〉에서 $2x^2+y^2+\sqrt{3}xy-8=0$은 회전변환에 의해 $\frac{(x')^2}{(4/\sqrt{5})^2}+\frac{(y')^2}{4^2}=1$로 변환되고 회전변환은 면적을 보존하므로 주어진 이차곡선으로 둘러싸인 영역의 면적은 $\frac{16\sqrt{5}}{5}\pi$이다.

2012학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 평가기준표

배점기준표

문항	배점	세 부 내 용
문제1	20	* 제시문에서 타당한 자료를 선택하여 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제3	20	
문제4	20	
문제5	20	
문제2	20	* 제시문에 근거하여 자료를 정확하게 분석하였는가? * 제시문에 근거하여 논리적인 추론을 전개하였는가? * 정확한 어법과 표현을 사용하여 서술하였는가?

평가기준

【문제 1】 아래에 제시된 답안에서 다음과 같이 점수를 부여한다.

① 전하량의 값을 얻기 위해 전력을 $kW \cdot h$단위에서 $W \cdot s$단위로 변환

② ①에서 얻은 전력을 전압으로 나누어 전하량을 결정

③ 전자의 몰 수와 리튬 금속의 몰 수가 동일함을 설명 $(Li \rightarrow Li^{+} + e^{-})$

④ ②에서 얻은 전하량을 $Faraday$ 상수로 나누어 전자 및 리튬의 몰 수를 계산

⑤ ④에서 얻은 리튬의 몰 수에 리튬의 원자량을 곱하여 리튬의 질량을 계산

리튬전지에 필요한 리튬의 질량을 구하기 위해서는 그 용량에 해당하는 전자의 몰 수를 먼저 구하고, 생성되는 전자와 반응하는 리튬의 몰 수와의 관계식을 화학 반응식으로부터 알아낸 후, 이를 이용하여 리튬의 질량을 계산한다.

먼저 전력량으로부터 전하량을 구하기 위해 다음과 같이 계산한다.

$$\text{전력},\ P = 16kW \cdot h \times \frac{1{,}000\,W \cdot h}{1kW \cdot h} = 16{,}000\,W \cdot h \times \frac{3{,}600s}{1h} = 57{,}600{,}000\,W \cdot s \quad \text{--------- ①}$$

$$\text{전하량},\ Q = \frac{57{,}600{,}000\,W \cdot s}{4.0\,V} = 14{,}400{,}000\,C \quad \text{------------- ②}$$

전하량은 생성된 전자의 양에 비례하므로 얻어진 전하량을 Faraday 상수 (전자 $1mol$의 전하량)로 나누어 주면 생성된 전자의 몰 수를 얻을 수 있다. 리튬 원자 1개는 산화반응을 통해 전자 1개를 생성하므로 생성되는 전자의 몰 수와 반응에 소모되는 리튬의 몰 수는 동일하다. 또한 Faraday 상수를 $96{,}000C/mol$로 가정했으므로 리튬과 전자의 몰 수는 다음과 같다.

$$\text{리튬 및 전자의 몰 수},\ n(e^{-}) = n(Li) \quad \text{------------- ③}$$

$$n(e^{-}) = n(Li) = \frac{Q}{Faraday\text{상수}} = \frac{14{,}400{,}000\,C}{96{,}000\,C/mol} = 150\,mol \quad \text{------------- ④}$$

얻어진 리튬의 몰 수에 제시문에 나타난 리튬의 원자량 $7g/mol$을 곱하면 반응에 참여하는 리튬의 질량을 결정할 수 있다.

$$\text{리튬의 질량},\ m(Li) = 150\,mol \times 7\,g/mol = 1{,}050\,g \quad \text{------------- ⑤}$$

따라서, $16kW \cdot h$의 용량을 갖는 리튬전지 (전압 $= 4.0\,V$)에 필요한 리튬의 양은 $1{,}050g$ $(1.050kg)$이다.

【문제 2】 아래에 제시된 답안에서 다음과 같이 점수를 부여한다.

① 리튬전지가 단위 질량 당 에너지가 다른 2차전지에 비해 높다는 장점
② 리튬전지가 단위 부피 당 에너지가 다른 2차전지에 비해 높다는 장점
③ 리튬전지가 단위 질량 당 가격이 다른 2차전지에 비해 높다는 단점
④ 리튬이 가장 가벼운 금속원소이기 때문에 단위 질량 당, 단위 부피당 에너지가 크다는 사실의 언급
⑤ 추론 과정의 논리적 전개 및 문장력

[제시문 1]의 내용과 〈그림 1〉 및 〈그림 2〉를 해석하여 리튬전지의 장점과 단점을 정리하고, 이를 바탕으로 전기자동차용 전지로 리튬전지가 적합하다는 타당한 이유를 제시하면 된다.

현재 가장 많이 사용되는 2차전지인 리튬전지는 제시문과 그림에서 보인 것처럼 에너지 밀도가 높은 장점이 있는 반면 단위 에너지 당 가격이 높다는 단점이 있다. 〈그림 1〉에 나타난 바와 같이 전지의 질량당 에너지를 비교하면 납축전지의 경우 $1kg$당 저장할 수 있는 에너지의 양이 약$50\,W \cdot h$인데 비해 리튬전지는 $200\,W \cdot h$이상의 높은 에너지를 저장할 수 있다. 또한 전지의 부피당 에너지를 비교하면 납축전지의 경우 $1L$당 저장할 수 있는 에너지의 양이 약$50\,W \cdot h$인데 비해 리튬전지는 약$300\,W \cdot h$의 에너지를 저장할 수 있기 때문에 단위질량 그리고 단위 부피 당 에너지는 납축전지 등 다른 종류의 2차전지에 비해 월등히 높은 것을 알 수 있다. 이와 같은 현상의 원인은 제시문에 보인 리튬과 아연의 비교 결과에서처럼 리튬이 고체 원소 중 가장 가벼운 원소이기 때문에 단위 질량 당 그리고 단위 부피 당 에너지가 다른 2차전지에 비해 상당히 높은 것임을 알 수 있다. 또한 질량 당 전력량을 비교하면 〈그림 2〉에 나타난 바와 같이 납축전지는 약$200\,W/kg$, 리튬전지는 $1,500\,W/kg$이상이므로 리튬전지의 질량 당 전력량이 높다. 반면, 〈그림 2〉에 나타난 바와 같이 경제성 측면에서는 다른 2차전지에 비해 단위 에너지 당 높은 가격을 보인다. 전기자동차용 전지의 상용화를 위해서는 경량화, 소형화, 고성능화, 경제성 등이 주요한 요인이 되는데, 앞서 언급한 바와 같이 리튬은 가장 가벼운 금속원소로 산화환원 반응이 가능하기 때문에 단위 질량 당, 단위 부피 당 에너지 밀도가 크다. 전기자동차용 전지로 경량화, 소형화, 고성능화가 훨씬 더 중요하므로 리튬전지가 다른 2차전지에 비해 다소 경제성이 낮더라도 전기자동차용 전지로 가장 유력한 후보이다.

【문제 3】 풀이과정이 다양하게 적혀 있을 수 있으나, 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 되는 a의 조건 각각에 점수를 부여하면 된다.

다음과 같은 4가지 형태로 분류할 수 있다. ---① $a^2-1=0$와 $a^2-1\neq 0$인 경우 구분

가) $a^2-1=0$인 경우 ($a=1$ 또는 $a=-1$): ---② 포물선이 되는 a의 범위 구하기

$y^2=2ax+1$이므로 포물선이 된다.

나) $a^2-1\neq 0$인 경우:

1) $a^2-1=-1$인 경우 ($a=0$): ---③ 원이 되는 a의 범위 구하기

$x^2+y^2=1$이 되므로 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 1인 원이 된다.

2) $a^2-1<0$ 이고 $a^2-1\neq -1$인 경우 ($-1<a<0$ 또는 $0<a<1$): ---④ 타원이 되는 a의 범위 구하기

$$\frac{(x-\frac{a}{1-a^2})^2}{(\frac{1}{1-a^2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}})^2}=1$$을 만족하므로 타원이 된다.

3) $a^2-1>0$인 경우 ($a>1$ 또는 $a<-1$): ---⑤ 쌍곡선이 되는 범위 구하기

$$\frac{(x+\frac{a}{a^2-1})^2}{(\frac{1}{a^2-1})^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{a^2-1}})^2}=1$$이 되므로 쌍곡선이 된다.

따라서 $a=0$이면 원, $a=1$ 또는 $a=-1$이면 포물선, $-1<a<0$ 또는 $0<a<1$이면 타원, $a>1$ 또는 $a<-1$이면 쌍곡선이 된다.

【문제 4】 아래에 제시된 답안에서 ① - ⑤ 각 단계에 점수를 부여한다.

$\mathrm{A}=2, \mathrm{B}=\sqrt{3}, \mathrm{C}=1, \mathrm{D}=0, \mathrm{E}=0, \mathrm{F}=-8$이므로 ------ ① 주어진 식 이해

$$(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin 2\theta+\mathrm{B}\cos 2\theta=(1-2)\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta$$

가 되고, 따라서 이 식을 0이 되게 하는 θ는 $\sqrt{3}\cos 2\theta=\sin 2\theta$를 만족한다. 따라서 $\tan 2\theta=\sqrt{3}$ 이고, $-\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{4}$라고 가정하였으므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$이고 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta=\frac{1}{2}$이다. ---- ② $\mathrm{B}'=0$이 되는 θ계산

지문의 계산식으로부터

$\mathrm{A}'=\mathrm{A}\cos^2\theta+\mathrm{C}\sin^2\theta+\mathrm{B}\cos\theta\sin\theta$ -- ③ $\mathrm{A}'\sim\mathrm{F}'$ 계산식 발견

$\mathrm{B}'/2=(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin\theta\cos\theta+(\mathrm{B}/2)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{2}\{(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin 2\theta+\mathrm{B}\cos 2\theta\}$

$\mathrm{C}'=\mathrm{A}\sin^2\theta+\mathrm{C}\cos^2\theta-\mathrm{B}\cos\theta\sin\theta$

임을 알 수 있으므로 계산을 하면

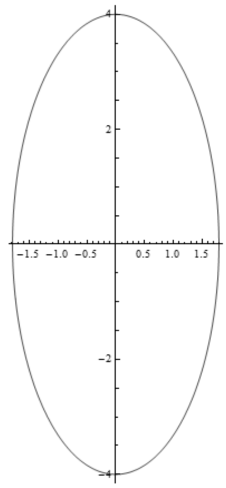
$\mathrm{A}'=\frac{5}{2}, \mathrm{B}'=0, \mathrm{C}'=\frac{1}{2}, \mathrm{D}'=0, \mathrm{E}'=0, \mathrm{F}'=-8$이 된다. --- ④ $\mathrm{A}'\sim\mathrm{F}'$ 계산

이로부터 타원의 방정식 $\frac{(x')^2}{(4/\sqrt{5})^2}+\frac{(y')^2}{4^2}=1$를 얻는다.

이 타원의 초점은 $\mathrm{F}(0, \pm\frac{8}{\sqrt{5}})$, 꼭짓점은 $(\pm\frac{4}{\sqrt{5}}, 0), (0, \pm 4)$

그리고 장축은 y축과 일치한다.

이 타원의 그래프는 그림과 같다. ---- ⑤ 타원방정식 표준형/그래프



【문제 5】 아래에 제시된 답안에서 ① - ⑤ 각 단계에 점수를 부여한다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0, b>0)$의 면적은 두 곡선 $y=b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$ 와 $y=-b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$ 으로 둘러싸인 면적과 같다. 따라서 타원의 면적은

$$\int_{-a}^{a}2b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\,dx$$ ----- ① 피적분함수 & ②적분범위

로 주어지고 $t=\frac{x}{a}$로 치환하면 $dx=a\,dt$ 이므로 $\int_{-1}^{1}2ab\sqrt{1-t^2}\,dt$가 된다. -- ③ 치환으로 식 변환

반지름이 1인 반원의 면적을 구하는 적분식으로부터 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}$ 가 되므로 타원의 면적은

$\int_{-1}^{1}2ab\sqrt{1-t^2}\,dt=2ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=ab\pi$이다. ----- ④ 적분으로 반원 면적 계산

〈문제 4〉에서 $2x^2+y^2+\sqrt{3}xy-8=0$는 회전변환에 의해 $\frac{(x')^2}{(4/\sqrt{5})^2}+\frac{(y')^2}{4^2}=1$로 변환되고 회전변환은 면적을 보존하므로 주어진 이차곡선으로 둘러싸인 영역의 면적은 $\frac{16\sqrt{5}}{5}\pi$이다. ---- ⑤ 이차곡선 면적 계산

2012학년도 수시 1차 논술고사
자연계열 학생답안

【문제 1】

하이브리드 형태의 전기 자동차에 사용되는 리튬전지의 용량이 $16kW \cdot h$일 때, 제시문 (나)에서와 같이 전하량과 몰수를 통해 리튬의 질량을 구할 수 있다. 계산을 쉽게 보이기 위해 단위를 다음과 같이 바꿔서 표현하자.

$$16kW \cdot h = 16000\,W \cdot h \times \frac{3600s}{1h} = 16000\,W \cdot 3600s$$

이 때 전력은 1초동안 일을 할 수 있는 능력으로, $16000\,W \times 3600s/1s = 16000 \times 3600\,C \cdot V/s$ 이다. 리튬 전지의 전압이 $4\,V$로 일정하므로 전하량은 $Q = \frac{16000 \times 3600\,C \cdot V/s}{4\,V} \times s = 4 \times 36 \times 10^5\,C$이다.

전자의 몰수는 $\frac{Q}{Faraday\text{상수}}$로, $\frac{4 \times 36 \times 10^5\,C}{96000\,C/mol} = 150mol$이다.

$(\text{몰수}) = \frac{(\text{질량})}{(\text{분자량})}$인데, 리튬의 분자량은 제시문에서 $7g/mol$이라 하였으므로 $(\text{질량}) = (\text{몰수}) \times (\text{분자량})$에 의해 $150mol \times 7g/mol = 1050g$이다.

【문제 2】

현대 사회에서는 공해물질의 증가와 에너지 자원의 고갈로 인해 신재생 에너지에 대한 관심이 높아지고 있다. 신재생 에너지는 자연으로부터 얻을 수 있고, 무한성, 에너지 효율성, 친환경 등의 조건이 만족되어야 한다.

그런데 리튬전지는 신재생 에너지의 공급량이 불규칙하기 때문에 에너지를 저장해두는 2차 전지로, 효율성이나 경제성에 있어서 유리해야 한다. 제시문의 〈그림 1〉에서는 리튬전지가 다른 2차전지들 보다 부피당 에너지 $(W \cdot h/L)$와 질량당 에너지$(W \cdot h/kg)$가 모두 높아 가장 효율적임을 알 수 있고, 이는 리튬전지의 장점이다.

하지만 〈그림 2〉에서는 리튬전지의 경제성 (원/$W \cdot h$)측면에서 다른 2차전지보다 비싸지만 제시문에서 언급된 바와 같이 실제 상용화에 적합한 경량화, 소형화, 고성능화 측면에서는 질량당 전력량 (W/kg)이 크기 때문에 리튬전지가 전기자동차용 전지로 가장 유리하다.

【문제 3】

$(ax+1)^2 = x^2 + y^2$, $(a^2-1)x^2 + 2ax - y^2 + 1 = 0$에서

i) $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$일 때 $y^2 = \pm 2x + 1$인 포물선이 된다.

ii) $a^2 - 1 = -1$, $a = 0$ 이면 $x^2 + y^2 = 1$인 원이 된다.

iii) $-1 < a < 1$이고 $a \neq 0$이면, x^2의 계수와 y^2의 계수가 부호는 같고 값은 다르므로 타원이 된다.

iv) $|a| > 1$이면 x^2의 계수와 y^2의 계수가 부호가 반대이고 값도 다르므로 쌍곡선이 된다.

【문제 4】

$$2x^2+y^2+\sqrt{3}xy-8=0,\ \ A=2,\ \ B=\sqrt{3},\ \ C=1,\ \ D=0,\ \ E=0,\ \ F=-8$$

$(x\ \ y)\begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-8=0$으로 표현하고 제시문에 의해 고치면

$$(x'\ \ y')\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}-8=0$$

$$\begin{pmatrix} A' & \frac{B'}{2} \\ \frac{B'}{2} & C' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sqrt{3}\,sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ -\sin\theta\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) & 2\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sqrt{3}\,sin\theta\cos\theta \end{pmatrix},\quad F'=-8$$

$-\sin\theta\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0$ 일때, $B'=0$이 된다. ((5)의 형태로 고쳐야하기 때문에)

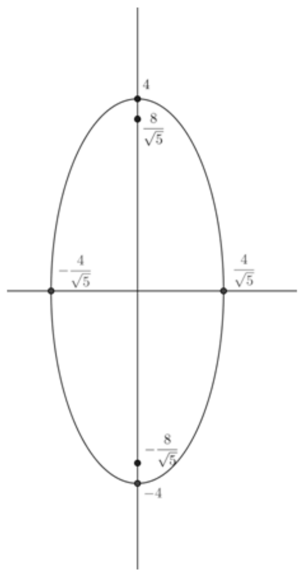
$$-\sin 2\theta+\sqrt{3}\,cos 2\theta=0$$

$2\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$일때 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

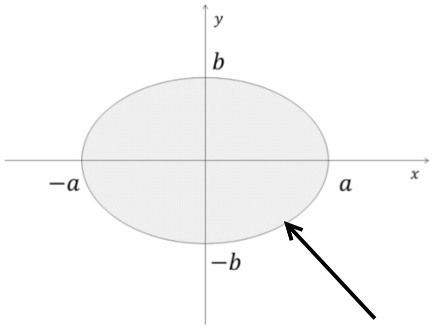
$$\begin{pmatrix} A' & \frac{B'}{2} \\ \frac{B'}{2} & C' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 2\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(x'\ \ y')\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}-8=0$$

$$\frac{5}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2-8=0\ \Rightarrow\ \frac{5}{16}x'^2+\frac{1}{16}y'^2=1,\quad a=\frac{4}{\sqrt{5}},\quad b=4,\quad c=\frac{8}{\sqrt{5}}$$



【문제 5】



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow \ y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$ 타원의 넓이

$x=a\sin\theta$ 치환하면 $dx=d\theta \cdot acos\theta$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b}{a}\times a\cos\theta\times a\cos\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ab\cos^2\theta d\theta$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=4ab\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4ab\times\frac{\pi}{4}=ab\pi$$

〈문제 4〉의 결과를 이용하면 $2x^2+y^2+\sqrt{3}xy-8=0$의 식은 $\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=8$의 식으로 회전변환에 의해 옮겨진다. 회전변환에 의해 옮겨진 도형의 면적은 옮겨지기 전 도형의 면적과 같고, 옮겨진 식은 타원이므로 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$일 때 면적은 $ab\pi$로 계산 할 수 있다. (위에서 증명)

옮겨진 식 $\Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{16}{5}}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$\therefore$ 구하고자하는 면적 $=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\times4\times\pi=\dfrac{16}{\sqrt{5}}\pi=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}\pi$