성신여자대학교 2011학년도 수시 1차 논술고사 예시문제(자연계열)

문제 해설

과학적인 원리와 논리적인 추론 과정을 설명하고 있는 지문의 내용을 잘 이해해야한다. 지문의 내용은 전문적 연구가 아닌 일반적인 과학적, 수학적 원리를 담고 있다. 지문이 설명하고 있는 식의 유도 과정을 주의 깊게 읽어, 고교 교과과정 안에서 배운 수학적 도구를 사용하여 답을 제시하여야 한다. 식을 얻는 과정을 설명할 때, 단순히 수식들을 나열하는 것은 논리적인 설명이 아니다. 또한 추론에 있어서도 그 근거와 추론과정, 그에 따른 결과를 논리적으로 서술해야 한다. 자신의 생각을 다른 사람이 읽었을 때 명확하고 설득력 있는 글과 수식으로 표현하는 것이 자연계 논술의 요점이다.

[제시문 1]
맨눈으로 보이지 않는 미생물이나 다른 미세구조를 관찰하기 위한 광학현미경의 배율과 분해능의 원리를 설명하고 있으며, 렌즈의 초점거리, 물체의 위치에 따른 상의 종류, 위치, 크기(배율)를 결정하는 과정을 제시하고 있다.

<문제 1> 렌즈의 공식 $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$을 이용하면 렌즈의 초점거리, 물체의 위치에 따른 상의 종류, 위치, 크기를 결정하여 배율을 구할 수 있다. 렌즈의 공식을 대물렌즈부터 대물렌즈까지 순서대로 적용하면 각 렌즈와 현미경의 최종배율을 구할 수 있다.
먼저, 렌즈의 공식을 이용하여 대물렌즈가 만드는 상의 위치와 배율을 구한다.

a= 4.1 f= 4 이므로 $\frac{1}{4}=\frac{1}{4.1}+\frac{1}{b}$에서 $b=164(mm)$이다. b가 양수이므로 대물렌즈에 의해 물체의 반대편 164mm 거리에 실상을 만든다. 배율(M)을 구하면 $M=-\frac{b}{a}=-\frac{164}{4.1}=-40$.
배율이 음수이므로 40배 확대된 뒤집힌 실상이 생긴다.
이 실상의 길이는 $h'=Mh=(-40)(0.1)$ 이므로 -4 (mm)이다.

그림 5에서와 같이 대안렌즈의 물체는 대물렌즈가 만든 확대된 실상이고, 대물렌즈의 상의 거리와 대안렌즈의 물체거리의 합이 두 렌즈 사이의 거리임을 이용하여 대안렌즈의 배율을 구할 수 있다. 두 렌즈 사이의 거리가 191mm이고 대물렌즈가 만든 실상의 거리는 164mm이므로, 대안렌즈와 물체(대물렌즈에 의해 생긴 실상)의 거리는 191-164=27(mm)이다. 대안렌즈의 초점거리가 30mm이므로 대안렌즈에 의해 생긴 상의 위치(b')를 구하면 $\frac{1}{30}=\frac{1}{27}+\frac{1}{b'}$에서 $b'=-270$ (mm)이다. 또한 대안렌즈의 배율(M')은 $-\frac{b'}{a'}=-\frac{-270}{27}=10$ (배)이다. 배율이 양수이므로 10배 확대된 허상이다. 그러므로 대물렌즈와 대안렌즈를 통해 맺힌 최종 허상의 길이는 $h''=M'h'=10\times(-4)=-40(\mathrm{mm})$이다.

최종 배율은 $M''=\frac{h''}{h}=\frac{-40}{0.1}=-400$(배). 배율이 음수이므로 관찰하는 물체의 400배 확대된

뒤집힌 상이 보인다.
그러므로 현미경의 최종배율은 대물렌즈(40배)와 대안렌즈(10배) 배율의 곱과 같다.

<문제 2> 렌즈는 빛을 펼침으로써 상을 확대할 수 있다. 하지만 상이 확대한다고 해서 항상 미세한 구조가 잘 보이지는 않는다. 즉, 분해능이 배율의 증가를 따라가지 못하는 경우는 단지 흐릿한 상이 단순히 확대될 뿐이다.
명시야 현미경으로 시료를 선명하게 관찰하기 위해서는 분해능(해상도)을 높여야 한다. 분해능을 높이기 위해 고려해야 하는 요인들에는 빛의 파장, 대비차, 렌즈의 성능 등이 있다. 명시야 현미경은 밝은 배경에 어두운 상이 실루엣처럼 보이므로, 시료와 배경의 대비차가 많이 나도록 주어진 렌즈에 최적인 빛의 양을 시료에 조사한다. 너무 밝거나 너무 어두우면 시료를 배경과 구분하기 어렵기 때문에 높은 대비차는 높은 배율에서 최대 분해능을 얻기 위해 필요하다. 투명한 시료는 배경과 대비차가 거의 없으므로 다양한 방법(단순염색, 분별염색, 음성염색 등)으로 염색을 통해 대비차를 높인다.
현미경의 해상력은 주로 대물렌즈의 성능에 의해 좌우된다. 해상력(분해능)은 구별할 수 있는 두 점의 최소거리(d)로 정의한다. 대물렌즈의 분해능은 $d=\dfrac{0.5\lambda}{n\sin\theta}$으로 나타내는데, d 값이 작을수록 분해능은 좋아진다. 그러므로 가능한 한 개구수($n\sin\theta$)가 큰 대물렌즈를 사용하고 짧은 파장(λ)의 빛 (450nm~500nm 파장의 푸른빛 영역)을 사용하면 가장 높은 해상도를 얻을 수 있다. 대물렌즈의 개구수(NA)는 두 성분(n과 $\sin\theta$)으로 정의하는데, n은 시료와 대물렌즈 사이의 매질의 굴절률이고, θ는 시료에서 대물렌즈로 들어오는 빛이 이루는 원추형 각의 1/2로 정의한다. θ 각의 크기는 0도 보다 크고 90도보다 작으므로, $\sin\theta$ 값이 커지기 위해서는 θ 각이 90도에 가까울수록 분해능이 높은 렌즈이다. 또한 개구수가 커지기 위해서는 n 값도 커야한다. n은 대물렌즈와 시료 사이의 매질의 굴절률이므로, 큰 개구수의 렌즈에는 공기보다 굴절률이 큰 유액(굴절률 1.5)을 사용하여야 뚜렷한 상을 볼 수 있다.

[제시문 2]
프랙털 도형에 대한 프랙털 차원의 정의가 어떻게 유도되는 지를 설명하고, 그 정의를 이용하여 간단한 프랙털 도형의 차원을 구하는 과정을 보여주는 제시문이다.

<문제 3> 제시문에서 식(1)은 최종적으로 완성된 프랙털 도형을 관찰하여 프랙털 차원을 구하는 방법이고, 식(2)는 프랙털을 만들어 가는 과정으로부터 프랙털 차원을 구하는 방법이다. 이 두 방법을 하나로 겹쳐 생각하면 식 (1)과 식 (2)의 관계를 파악할 수 있다. 이 때 각 방법에서 어떤 양을 비교하여 같다고 두고, 연관성을 식으로 나타내면 된다.
프랙털 도형을 만들 때, 처음에 주어진 도형의 한 변의 길이를 1이라 하고, 이 단계의 번호

를 $n=0$이라 하자. 이후 반복의 n번째 단계에서, N_n을 남아 있는 작은 도형의 개수, L_n을 그 작은 도형의 한 변의 길이라고 하자.

식 (1)에서 $\epsilon = L_n$으로 생각하면, 즉 전체 프랙털 도형을 닮음비 ϵ으로 축소한 작은 프랙털 도형의 둘레의 한 변의 길이를 L_n이라고 하면, $\epsilon \to 0$ 일 때, $n \to \infty$이다. 그리고 이 n번째 단계에서 남아 있는 작은 도형의 개수 N_n은 전체 완성된 프랙털 도형을 덮기 위해서 필요한 전체 프랙털 도형을 비율 ϵ으로 축소한 닮은 프랙털 도형의 개수 $N(\epsilon)$과 같다. 즉, $N(\epsilon) = N_n$이다. 따라서 다음과 같이 식 (2)가 얻어진다.

$$d = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N_n}{\ln \frac{1}{L_n}}$$

<문제 4> 제시문에서 설명하고 있는 코흐의 눈송이 프랙털의 구성 과정의 원리를 이해하여야, 각 단계에서 전체 둘레의 길이 P_n, 내부 넓이 A_n의 일반항을 구할 수 있다. 그 일반항을 이용하여 극한값 $\lim_{n \to \infty} P_n$과 $\lim_{n \to \infty} A_n$의 값을 구한다.

처음에 한 변의 길이가 1인 정삼각형에서 시작하였으므로, $n=0$번째 단계에서 전체 둘레의 길이는 $P_0 = 3$, 내부의 넓이는 $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$이다.

코흐의 눈송이 프랙털을 만드는 과정의 n번째 단계에서 전체 둘레는 길이가 $L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$인 작은 선분 $N_n = 3 \times 4^n$개로 이루어져있으므로, 그 길이는 $P_n = N_n L_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$이다. 그리고 이 일반항으로부터 $\lim_{n \to \infty} P_n = \infty$ 임을 알 수 있다.

코흐의 눈송이 프랙털을 만드는 과정의 n번째 단계에서 새로 붙여지는 작은 정삼각형은 처음 시작할 때의 정삼각형을 닮음비 L_n으로 축소한 것이고, 그런 작은 정삼각형이 그 전 단계에 있던 N_{n-1}개의 선분마다 하나씩 붙여지므로,

$A_n = A_{n-1} + N_{n-1} L_n^2 A_0 = A_{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} A_0$이다. $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

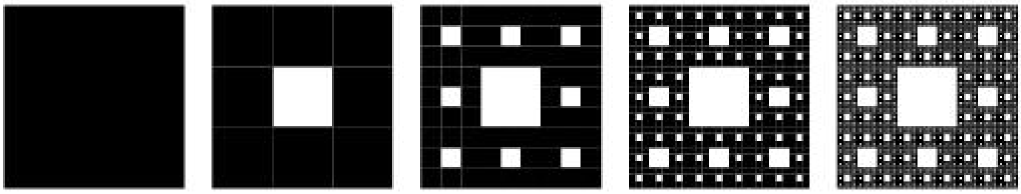
따라서 계차수열의 합을 이용하여 A_n의 일반항을 다음과 같이 구한다.

$$A_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} A_0 = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} A_0 = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

$$= A_0 + \frac{A_0}{3} \frac{[1-(4/9)^n]}{1-4/9} = \left\{1 + \frac{3}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]\right\} A_0$$

그러므로 $\lim_{n \to \infty} A_n = \left\{1 + \frac{3}{5}\right\} A_0 = \frac{8}{5} A_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ 이다.

<문제 5> 시어핀스키 카펫 프랙털을 만들어가는 단계를 생각하고 제시문의 식 (2)를 이용하여 프랙털 차원을 구할 수 있다.



처음 $n=0$ 단계에서 주어진 정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하고, 반복의 n번째 단계에서, 남아 있는 정사각형의 개수 N_n, 각 정사각형의 한 변의 길이 L_n은 다음과 같이 구해진다.

$$N_n = 8^n, \qquad L_n = \frac{1}{3^n}$$

이 값을 이용하여 시어핀스키 카펫 프랙털의 차원을 제시문의 (2)번 식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n}{\log \frac{1}{L_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(8^n)}{\log(3^n)} = \log_3 8 = 3\log_3 2 = 3\times 0.63 \approx 1.89$$

(본문에서 사용된 로그의 근삿값 $\log_3 2 \approx 0.63$을 이용하여 d의 값을 소수 둘째자리까지 구한다.)