성신여자대학교 2011학년도 수시 1차 논술고사 예시문제(자연계열)

[제시문 1]은 <문제 1>, <문제 2>에 해당하며, [제시문 2]는 <문제 3>, <문제 4>, <문제 5>에 해당합니다. 각 제시문은 일반적인 과학, 수학적 원리를 담고 있습니다. 제시문을 잘 읽고 그 내용에 근거하여 수식과 논리를 명확히 전개하여 답하시오.

[제시문 1]--

현미경은 맨눈으로 보이지 않는 미생물이나 다른 미세구조를 관찰하기 위한 기기이다. 여러 가지 렌즈를 이용한 현미경은 1590년대 네덜란드의 얀센(Jansen) 부자에 의해 만들어졌으며, 이 현미경은 망원경의 형태로 제작되어 주로 해양탐사에 이용되었다. 그 후, 17세기 네덜란드의 레벤후크(Anthony van Leeuwenhoek)와 후크(Robert Hooke)에 의해 최초로 대물렌즈와 오목렌즈를 사용한 현미경이 만들어졌으며, 이것은 지금의 현미경의 모태가 되었다. 레벤후크는 현미경을 이용하여 식물세포를 비롯하여 치아 속에 있는 박테리아, 연못에 사는 작은 생물 등 여러 가지 생물의 모습을 관찰하고 기록하였다. 이때부터 그 동안 알지 못했던 새로운 미생물의 시대가 열리게 되었다. 현재에는 빛 (가시광선)과 렌즈를 사용한 광학현미경 이외에도 전자빔을 사용하는 전자현미경, 그리고 전혀 다른 원리를 이용하는 주사탐침현미경 등 새롭고 강력한 현미경이 계속 발명되고 있다. 빛(가시광선)과 렌즈를 이용하는 광학현미경이 어떻게 맨눈으로 보이지 않는 미생물이나 다른 미세구조를 확대하여 관찰할 수 있는지 그 원리에 대해 살펴보자.

광학현미경은 빛을 이용한다. 빛(가시광선)은 전자기 방사선 스펙트럼의 일부분이다. 전자기 방사선은 파동(wave)으로 전달되는 에너지 형태이므로 전자기 방사선 스펙트럼은 파장으로 정의되는데, 우리의 눈이 감지할 수 있는 가시광선은 파장이 약 400nm(보라색)에서 750 nm(붉은색)이다. 나노미터(nm)는 10^{-9} 미터(m)이다.

빛은 직진하며 빈 공간(진공)에서 이동할 수 있을 뿐만 아니라 공기, 물, 유리, 수정체 등의 투명한 매질을 통해서도 이동할 수 있다. 하지만 한 매질에서 다른 매질로 들어가면 빛의 진행 방향이 바뀌는데 이를 **굴절**이라고 한다. 굴절이 되는 이유는 각 매질에서 빛의 속도가 다르기 때문이다. **그림 1**은 한 매질에서 다른 매질로 들어가는 빛을 보여준다. 빛의 속도가 매질1(공기)보다 매질2 (유리)에서 더 느리면 (유리의 굴절률이 공기보다 크면), 빛은 두 매질 경계면의 수직선 쪽으로 굴절된다. 반대로 빛이 유리에서 공기로 나오면 빛은 수직선에서 먼 쪽으로 굴절된다.

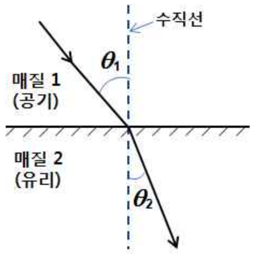


그림1. 빛의 굴절

광학현미경의 작동 원리를 이해하기 위해서는 먼저 렌즈가 상을 형성하기 위해 빛을 굴절시켜 초점을 맞추는 원리를 알아야 한다. 볼록렌즈의 곡면은 렌즈에 평행하게 도달하는 빛이 특정지점 즉, **초점**(**그림 2**의 F)에 모이도록 깎여 있다. 이 경우 렌즈의 중심에서 초점까지의 거리를 **초점거리**(f)라

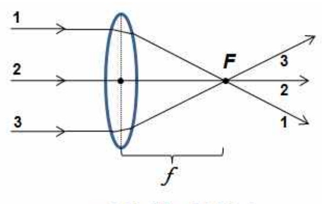


그림2. 렌즈의 원리

한다.

렌즈를 통과한 빛에 의해 맺어지는 상의 종류, 위치, 크기들은 렌즈의 초점거리와 물체의 위치에 따라서 결정된다. 이것들은 물체의 한 점으로부터 출발한 빛의 진행방향을 그려 결정할 수 있다.

먼저, 물체가 볼록렌즈에서 초점거리보다 멀리 위치하는 경우에 물체의 한 점에서 나온 빛이 볼록렌즈를 통해 진행하는 방향은 다음과 같다 (**그림** 3).

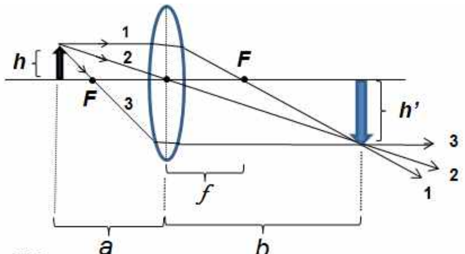


그림3.

(1) 볼록렌즈의 중심축과 평행한 빛은 굴절되어 렌즈 반대쪽의 초점 F 를 지난다 (그림3의 빛 1).
(2) 렌즈의 중심으로 들어온 빛은 직진한다 (그림3의 빛 2).
(3) 물체 쪽의 초점을 지나 렌즈로 들어온 빛은 렌즈의 중심축과 평행하게 진행한다 (그림3의 빛 3).

이 빛들은 한 점에서 모이는데, 이곳에 상이 맺어진다. 이 위치에 스크린을 놓으면 뒤집힌 상을 볼 수 있다. 이를 **실상**이라 한다. 물체의 한 점에서 여러 각도로 나와 렌즈를 통과한 빛들은 모두 한 점에 모이므로, 두 빛의 경로만 그려 교차하는 점을 구하면 된다.

이번엔 물체가 볼록렌즈의 초점거리보다 가까이 위치하는 경우를 그려보자 (**그림** 4).
볼록렌즈의 중심축과 평행하여 렌즈 반대쪽의 초점 F 를 지난 빛(그림4의 빛 1)과 렌즈의 중심으로 들어온 빛(그림4의 빛 2)의 경로를 그려보면, 렌즈의 반대쪽에서 만나지 않는다. 그러므로 실상이 맺히지 않는다. 하지만 렌즈의 반대쪽에 있는 관찰자에게는 렌즈에서 b 만큼 떨어진 위치에 바로 선 상이 있는 것으로 보인다. 이것을 **허상**이라 한다.

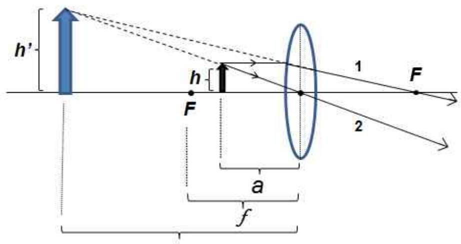


그림4.

위와 같이 빛의 진행방향을 그려 상의 종류, 위치, 크기를 구하는 방법을 기하광학적 방법이라고 한다.

하지만 얇은 렌즈의 경우 면을 거의 구면으로 가정할 수 있고, 근사적으로 성립하는 렌즈의 공식을 써서 구할 수도 있다. 물체와 렌즈 사이의 거리를 a, 렌즈와 상 사이의 거리를 b, 렌즈의 초점거리를 f(**그림** 3과 4), 배율을 M이라고 하면, 다음의 식(렌즈의 공식)이 성립한다.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \qquad \text{배율}\,(M) = \frac{h'}{h} = -\frac{b}{a}, \qquad (h\text{는 물체의 길이},\ h'\text{은 상의 길이})$$

단, 볼록렌즈의 초점거리 f는 양수이다. 그리고 $b > 0$ 이면 렌즈를 기준으로 물체 반대편에 실상이 생기고, $b < 0$ 이면 물체 쪽에 허상이 생긴다. 배율 M이 양수이면 직립(바로 선)상, 음수이면 도립(뒤집힌)상이 생긴다. 상의 위치와 초점거리를 알 때, 이 공식을 사용하면 상의 종류와 위치, 크기를 알 수 있다. 즉, 볼록렌즈의 초점거리 바깥에 물체를 두면 반대편에 뒤집힌 상(도립실상)이 생기고, 초점거리 안에 물체를 두면 물체 쪽으로 확대된 직립허상이 생긴다.

이제, 두 개의 얇은 볼록렌즈로 만든 광학현미경을 생각해 보자. 2개의 렌즈 중 물체 쪽의 렌즈를 대물렌즈, 눈으로 보는 렌즈를 대안렌즈라 한다. 현미경에서 사용되는 대물렌즈는 확대된 도립실상을 만들고, 이 상은 대안렌즈에 의해 더 확대된다. 대물렌즈의 초점 밖에 작은 물체(길이 h)를 놓으면 대물렌즈에 의해 확대된 실상(길이 h')이 만들어진다. 이 확대된 실상(길이 h')이 대안렌즈에게는 물체의 역할을 하게 된다. 따라서 실상(길이 h')이 대안렌즈의 초점에 맞도록 렌즈를 조절하면 확대된 허상(길이 h'')이 맺히게 되고, 이 때 관찰자는 이 허상(길이 h'')을 볼 수 있다(**그림** 5). 현미경의 두 렌즈 사이의 거리는 고정되어 있으므로 관찰하고자 하는 물체와 대물렌즈 사이의 거리를 조절하여 초점을 맞춘다.

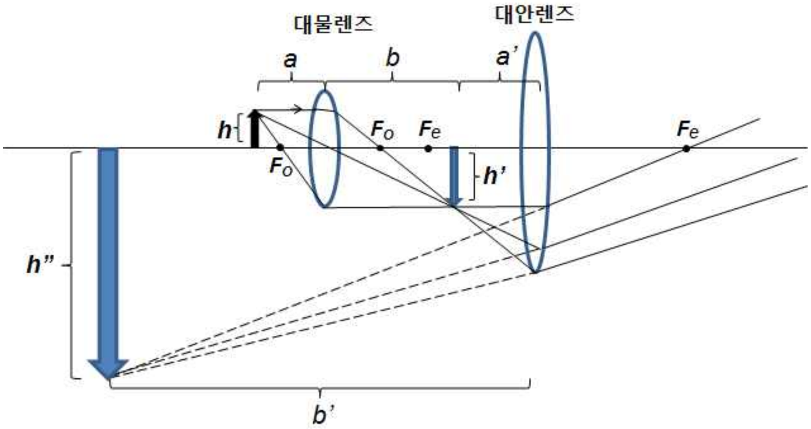


그림 5. 복합현미경 F_o와 F_e는 각각 대물렌즈와 대안렌즈의 초점, 물체와 대물렌즈 사이의 거리는 a, 실상(h')과 대안렌즈와 거리는 a', 대안렌즈와 허상(h'') 사이의 거리는 b'로 표시함.

가장 일반적으로 사용되는 광학현미경은 명시야 현미경이다. 이 현미경을 통해 보면, 관찰하고자 하는 물체(시료)는 빛을 흡수, 굴절, 산란하여 어둡게 보이고, 나머지 배경은 빛이 통과하여 밝게 보인다. 즉 밝은 배경에 어두운 상이 실루엣처럼 보인다. 하지만 배경과 물체의 빛 투과도가 비슷하면 상이 투명하게 보여 관찰하기 어렵다. 밝음과 어두움의 차이를 대비차(contrast)라 하는데, 배경과 물체의 대비차가 증가되도록 하면 상을 훨씬 선명히 관찰할 수 있다. 또 사람의 눈은 가시광선의 범위에서 여러 색을 구별할 수 있으므로 배경과 시료의 색 차이가 있으면 상을 관찰하기 좋다.

관찰하는 시료의 구조를 자세히 볼 수 있는 능력을 해상력(분해능)이라 한다. 즉, 분해능은 아주 가까운 두 점을 구별하는 렌즈의 능력이다. 이것은 현미경의 성능을 좌우하는 중요한 조건으로, 주로 대물렌즈의 성능에 의하여 결정된다. 따라서 대물렌즈와 접안렌즈와의 조합

에 의하여 아무리 배율을 증가시키더라도 대물렌즈의 성능이 나쁘면 흐릿한 상이 단순히 확대될 뿐으로, 미세한 구조의 식별은 되지 않는다. 독일의 물리학자 아베는 현미경이 구별할 수 있는 두 점의 최소거리(d)를 구하는 방정식을 제시하였다. d값이 적을수록 더 가까운 두 점을 구별할 수 있으므로 분해능이 좋다.

$d = \frac{0.5\lambda}{n \sin\theta}$, ($\lambda$는 시료에 조사되는 가시광선의 파장, $n \sin\theta$ 는 대물렌즈의 개구수)

렌즈가 빛을 모으는 능력을 나타내는 대물렌즈의 개구수(NA)는 두 성분(n과 $\sin\theta$)으로 정의한다. n은 시료와 대물렌즈 사이의 매질의 굴절률이다(굴절률의 예: 공기 1.0, 물 1.31, 아세톤 1.36, 유액 1.5). θ는 시료에서 대물렌즈로 들어오는 빛이 이루는 원추형 각의 1/2로 정의한다 (**그림** 6). θ각이 작으면 원추 모양의 끝이 뾰족하여 시료를 지난 빛이 잘 퍼지지 못하므로 상이 적절하게 분리되어 맺히지 못하므로 물체가 뭉쳐 보인다.

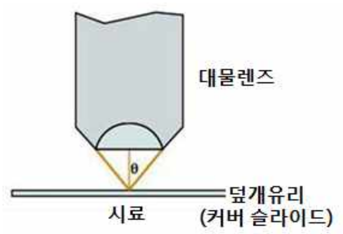


그림 6. 대물렌즈의 개구수

커버 슬라이드 위에 아무것도 처리하지 않은 (매질이 공기인) 건조계 대물렌즈의 개구수는 0.05~0.95의 범위이고, 렌즈와 커버 슬라이드 사이를 액체로 채워 개구수를 높이는 액체계 대물렌즈도 1.4가 최고이므로 광학현미경의 최고 해상력은 0.2 μm 정도이다 (μm = 10^{-6}m). 맨눈의 최고 해상력은 0.2 mm 정도이므로, 자세한 구조를 알 수 있도록 해상력이 뒷받침되는 광학현미경의 최대배율은 1000배 정도가 된다. 즉, 아무리 좋은 광학현미경이라도 1000배 이상에서는 배율이 높아지더라도 더 자세한 상이 보이지 않는다.

<문제 1> 2개의 볼록렌즈로 구성된 복합현미경에서 대물렌즈의 초점거리는 4mm이고, 대안렌즈의 초점거리는 30mm이다. 두 렌즈는 191mm 떨어져 있다. 길이가 0.1mm인 물체가 대물렌즈에서 4.1mm 떨어져있는 경우에 초점이 맞았다. 대물렌즈와 대안렌즈의 배율, 그리고 이 현미경의 최종배율을 각각 구하고, 최종배율은 대물렌즈와 대안렌즈 배율의 곱과 같음을 보이시오.

<문제 2> 명시야 현미경으로 미생물이나 미세구조 등을 높은 배율에서 관찰할 때, 선명하게 볼 수 있는 방법을 제시문에 근거하여 논리적으로 추론하시오.

[제시문 2]--

인체에서 허파의 혈관이나, 기관지가 벌어져 나가는 모양, 뉴런의 구조, 또 자연에서 볼 수 있는 고사리 잎의 모양, 공작의 깃털무늬, 구름과 산의 형태, 해안선의 모양, 은하 구조 등에서 공통적으로 관찰되는 성질은 부분을 확대하면 전체와 닮은 모양이 된다는 것이다. 이러한 성질을 갖는 형태를 프랙털이라고 부른다. 기원전 300년경에 유클리드에 의하여 정립되어 현재에도 수학의 바탕이 되고 있는 유클리드 기하학의 원, 삼각형, 사각형 같은 도형과 비교해서 프랙털 도형은 다른 특성을 가진다. 수학적인 프랙털 이론은 1970년대 만델브로(Mandelbrot)에 의하여 시작되었다고 볼 수 있으며, 이후 여러 분야에서 응용되어 활발한 연구가 이루어지고 있는 분야가 되었다.

프랙털 기하에서 프랙털 차원 d는 프랙털을 계속 확대하여 더 세밀한 측도로 관찰할 때 공간을 얼마나 완벽하게 채우는 지를 나타내는 양이다. 수학적으로 정의된 프랙털 도형에 대해서는 프랙털 차원을 알맞게 정의하여 계산할 수 있다. 하지만 프랙털적인 성질을 보이는 유기체나 자연적 현상 등의 프랙털 차원은 정확한 값으로 구할 수 없고, 관찰 또는 측정 자료들로부터 근사적인 프랙털 차원을 구하게 된다. 이러한 방법은 물리학, 음향학, 화학 반응 등의 분야에서 이용되고 있다.

이제 점, 선, 면 등의 차원 개념을 일반화하여 프랙털 도형의 차원을 어떻게 정의하는지 알아보자. 1차원인 직선 위에서 길이가 1인 한 선분은 자신을 닮음비 $\frac{1}{m}$로 축소한 선분 m개로 덮어진다. 2차원인 평면에서 한 변의 길이가 1인 정사각형은 자신을 닮음비 $\frac{1}{m}$로 축소한 도형 m^2개로 덮어진다. 3차원인 공간에서 한 변의 길이가 1인 정육면체는 자신을 닮음비 $\frac{1}{m}$로 축소한 도형 m^3개로 덮인다. 일반적으로 d차원 공간에서 각 변의 길이가 1인 d차원 도형을 덮기 위해서는 그 자신을 닮음비 $\frac{1}{m}$로 축소한 도형 $N=m^d$개가 필요하다. 이 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

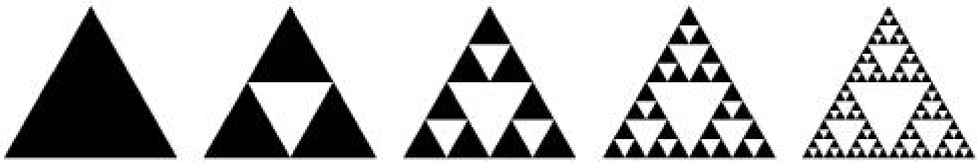
$$d=\frac{\log N}{\log m} \qquad \text{(이 식에서 log의 밑은 1이 아닌 임의의 양의 실수)}$$

위의 식을 프랙털 도형에 적용하면 다음과 같이 정의되는 프랙털 차원을 얻는다.

$$d=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log N(\epsilon)}{\log\frac{1}{\epsilon}} \qquad \text{.. (1)}$$

위 식에서 $N(\epsilon)$은 전체 프랙털 도형을 덮기 위해서 전체 프랙털 도형을 닮음비 ϵ으로 축소한 작은 프랙털 도형 몇 개가 필요한지, 그 개수를 나타낸다.

예를 들어, 시어핀스키 삼각형이라고 불리는 프랙털의 프랙털 차원을 구해보자. 시어핀스키 삼각형은 정삼각형의 내부에서 각 변의 중점을 이어 만든 작은 정삼각형의 내부를 빼내는 과정을 남아 있는 작은 정삼각형마다 무한히 반복하여 최종적으로 얻게 되는 도형이다.



시어핀스키 삼각형에서 전체 프랙털 도형을 덮으려면 전체 프랙털 도형을 닮음비 $\epsilon = \dfrac{1}{2^n}$로 축소한 작은 프랙털 도형 $N(\epsilon) = 3^n$개가 필요하다. 따라서 시어핀스키 삼각형의 프랙털 차원은 다음과 같이 계산된다.

$$d = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} = \log_2 3 \approx 1.585$$

시어핀스키 삼각형을 만들어가는 과정에서 처음에 주어진 정삼각형의 한 변의 길이를 1이라 하고, 이 단계의 번호를 $n=0$이라 하자. 이후 반복의 n번째 단계에서, N_n을 남아 있는 작은 정삼각형의 개수, L_n을 그 작은 정삼각형의 한 변의 길이로 두면 프랙털 차원을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N_n}{\ln \frac{1}{L_n}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

시어핀스키 삼각형에 대하여 N_n과 L_n을 구해보면 다음과 같다.

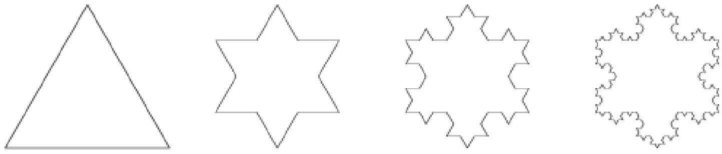
$$N_n = 3^n, \quad L_n = \frac{1}{2^n}$$

이 값을 이용하여 시어핀스키 삼각형의 프랙털 차원을 다음과 같이 구해진다.

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N_n}{\ln \frac{1}{L_n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} = \log_2 3 \approx 1.585$$

선분을 변형하여 만들어진 프랙털 도형과 입체를 변형하여 만들어진 프랙털의 예로서 코흐의 눈송이(Koch snowflake) 프랙털과 멩거의 스펀지(Menger Sponge) 프랙털의 차원을 살펴보면 다음과 같다.

코흐의 눈송이는 정삼각형의 둘레에서 각 변의 가운데에서 그 변의 $\frac{1}{3}$ 길이의 선분을 빼버리고, 남은 두 선분과 같은 길이의 이등변삼각형의 두 변을 바깥쪽으로 만들어주고, 이후 남아 있는 각 선분마다 이 과정을 무한히 반복하여 최종적으로 얻게 되는 프랙털 도형이다.



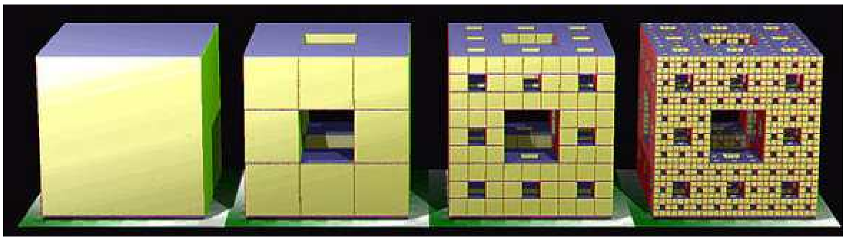
처음 $n=0$ 단계에 주어진 정삼각형의 한 변의 길이를 1이라 하고, 반복의 n번째 단계에서, 남아 있는 선분의 개수 N_n, 각 선분의 길이 L_n은 다음과 같이 구해진다.

$$N_n = 3\times 4^n, \quad L_n = \frac{1}{3^n}$$

이 값을 이용하여 코흐의 눈송이 프랙털의 차원을 위의 (2)번 식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$d = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln N_n}{\ln\frac{1}{L_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(3\times 4^n)}{\log(3^n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log 3 + n\log 4}{n\log 3} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \approx 2\times 0.63 = 1.26$$

멩거의 스펀지 프랙털은 다음과 같은 과정으로 만들어진다. 먼저 한 정육면체에서 시작하여, 각 모서리를 3등분하여 전체를 27개의 작은 정육면체로 나누고, 각 면의 가운데와 전체 정육면체의 중심에서 작은 정육면체를 하나씩 빼낸다. 이 과정을 남아있는 작은 정육면체 각각에 무한히 반복하여 최종적으로 얻게 되는 도형이 멩거의 스펀지 프랙털이다.



처음 $n=0$ 단계에 주어진 정육면체의 한 변의 길이를 1이라 하고, 반복의 n번째 단계에서, 남아 있는 정육면체의 개수 N_n, 각 정육면체의 한 변의 길이 L_n은 다음과 같이 구해진다.

$$N_n = 20^n, \quad L_n = \frac{1}{3^n}$$

이 값을 이용하여 멩거의 스펀지 프랙털의 차원을 위의 (2)번 식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$d = \lim_{n\to\infty}\frac{\log N_n}{\log\frac{1}{L_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(20^n)}{\log(3^n)} = \log_3 20$$

$$= \log_3(2^2\times 5) = 2\log_3 2 + \log_3 5 \approx 2\times 0.63 + 1.465 = 2.725$$

<문제 3> 제시문에서 프랙털 차원을 구하는 식(1)을 식(2)의 형태로 나타낼 수 있는 이유를 설명하시오.

<문제 4> 한 변의 길이가 1인 정삼각형에서 시작하여 코흐의 눈송이 프랙털을 만드는 과정의 n번째 단계에서 전체 둘레의 길이를 P_n, 내부 넓이를 A_n이라고 할 때, P_n과 A_n의 일반항을 구하고, $\lim_{n\to\infty} P_n$과 $\lim_{n\to\infty} A_n$의 값을 구하는 과정을 설명하시오.

<문제 5> 멩거 스펀지의 한 쪽 면을 이루는 평면 도형은 시어핀스키 카펫(Sierpiński Carpet)이라고 불리는 프랙털 도형이다.
이 도형의 프랙털 차원을 구하는 과정을 설명하고
그 값을 소수 둘째자리까지 구하시오.
(로그의 값은 본문에서 사용된 값들 중에서 찾아 쓰시오.)