자연계 논술
출제의도 및 문제해설

1. 출제의도

본교의 2011학년도 수시모집 자연계 논술고사는 고등학교 과정을 이수한 학생이 제시문을 읽고 이해하여 그를 바탕으로 해결할 수 있는 문제들을 다루고 있다. [제시문 1]에 대해서는 산화-환원반응의 정의와 이것을 이용한 화학전지의 원리를 이해하고, 자연현상에 산화-환원반응을 어떻게 적용할 수 있는가에 대한 추론 능력을 평가하는 문제들이 주어져 있다. [제시문 2]에 대해서는 자연수를 어떤 수의 거듭제곱으로 표현할 때 그 지수를 찾는 방법과 팩토리얼을 이용하여 자연수를 표현하는 방법에 관한 문제들이 주어져 있다.

주어진 제시문에서 수학적 기본개념과 과학적 원리를 이해하고, 이를 바탕으로 개념과 원리를 적용하여 현상을 분석하는 능력과 논리적으로 설명하는 능력을 평가하는 것이 본 논술고사의 출제의도이다.

2. 문제해설

<문제 1 풀이>

화학전지에서 표준상태가 아닌 경우, 전지의 전위(기전력)는 온도, 기체의 부분 압력, 혼합물의 농도 등에 영향을 받는다. 전지를 구성하고 있는 산화-환원반응식, 표준환원전위, 혼합물의 농도가 주어졌을 때, 네른스트 식 (Nernst equation)을 이용하여 전지의 전위를 구하면 된다.

산화-환원반응식($3Mg + 2Al^{3+} \rightarrow 3Mg^{2+} + 2Al$)으로부터
음극의 산화반응($3Mg \rightarrow 3Mg^{2+} + 6e^{-}$)과 양극의 환원반응($2Al^{2+} + 6e^{-} \rightarrow 2Al$)식을 알 수 있다.
그러므로 이 반응에서 이동한 전자의 수(n)는 6이다.

표준전지전위($\varepsilon^{o}_{전지}$)는 환원전극과 산화전극의 표준환원전위의 차이로부터 구할 수 있다.
$\varepsilon^{o}_{(환원전극)} = -1.66\,V$이고 $\varepsilon^{o}_{(산화전극)} = -2.37\,V$이므로, $\varepsilon^{o}_{전지} = \varepsilon^{o}_{(환원전극)} - \varepsilon^{o}_{(산화전극)}$에 대입하면,
$\varepsilon^{o}_{전지} = -1.66 - (-2.37) = 0.71\ (V)$이다.

산화-환원반응식으로부터 반응물인 Al^{3+}의 초기농도는 1M, 반응계수 2이고
생성물인 Mg^{2+}의 초기농도는 0.1M, 반응계수는 3이므로
반응지수(Q)는 $\dfrac{(0.1)^3}{1^2} = 10^{-3}$ 이다.

최종적으로 네른스트 식 (Nernst equation), $\varepsilon_{전지} = \varepsilon^{o}_{전지} - \dfrac{0.0591}{n} \times \log_{10}(Q)$에서 전지전위($\varepsilon_{전지}$)를 구하면, $\varepsilon_{전지} = 0.71 - \dfrac{0.0591}{6} \times \log_{10}(10^{-3}) = 0.73955\,(V)$ 이다.

<문제 2 풀이>
[제시문 1]에서 언급한 산화-환원반응의 예들은 어떤 물질이 산소와 결합하거나 전자를 잃음으로써 산화하는 것들이다. 따라서 철제기구에서 산화-환원반응이 일어나는 것을 억제할 수 있는 방법들을 제시하면 된다.

철이 공기 중의 산소와 같은 산화를 유발하는 물질과 접촉하는 것을 막으면 된다. 그 원리는 사과껍질이 산소와 사과 내부와의 접촉을 막는 것이다. 그러므로 사과 내부가 산화되지 않은 상태로 일정기간 보관할 수 있다. 이를 위한 구체적인 방법으로는 공기가 철에 직접 닿지 않도록 페인트나 도료를 칠하는 것이다. 그리고 칠해진 페인트나 도료가 철의 산화를 유도하면 안 되기 때문에 그 원료가 철을 산화시키는 것이 아니어야 한다. 그 방법들 중 하나는 철보다 산화되는 정도가 작은 금속으로 도금하거나 이들 성분이 있는 물질로 코팅하는 것이다. 또한, 기구를 습도가 낮은 곳에 놓아 사용하거나 제습기 또는 제습제를 사용하여 습도를 낮추어 산화반응이 쉽게 진행되지 않도록 한다. 왜냐하면 공기 중의 높은 습도는 산화 반응을 빨리 진행하게 한다. 그리고 철제기구가 산소와 같은 철의 산화를 유발하는 물질의 농도가 높지 않은 곳에 놓아 사용한다. 왜냐하면 산소 농도가 높은 상태에서는 산화 반응이 빨리 진행되기 때문이다. 철에 전류를 흘려, 철이 산화반응으로 잃게 되는 전자의 양만큼을 지속적으로 다시 철에 공급하는 것도 철이 산화될 기회를 미연에 방지할 수 있는 하나의 방법이다. 그 구체적인 방법으로 마그네슘과 같은 산화 가능성이 큰 금속을, 전선을 이용하여 보호하고자 하는 철제 기구에 연결하는 것을 생각할 수 있다.

<문제 3 풀이>

$10120_{(!)} = 1\times 5! + 1\times 3! + 2\times 2! = 120 + 6 + 4 = 130$ 이다. 이 수의 팩토리얼, 즉 $130!$을 계산하여 30진법 수로 표현했을 때 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0의 개수를 구하기 위해서는 $130!$의 약수 중에서 30의 거듭제곱 꼴로서 지수가 가장 큰 것을 찾아야 한다.

$30 = 2\times 3\times 5$ 이므로 $130! = 130\times 129\times 128\times \cdots \times 2\times 1$ 의 소인수분해에 나타나는 2의 지수를 p, 3의 지수를 q, 5의 지수를 r를 찾으면, $r = \left[\frac{130}{5}\right] + \left[\frac{130}{25}\right] + \left[\frac{130}{125}\right] = 26 + 5 + 1 = 32$이고 $p > q > r$ 이다.

따라서 $130!$의 약수 중에서 30의 거듭제곱 꼴로서 지수가 가장 큰 것은 $30^r = 30^{32}$이다. 그러므로 $10120_{(!)}! = 130!$을 30진법 수로 표현했을 때 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0은 32개이다.

<문제 4 풀이>

$n=1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{1} k\times k! = 1\times 1! = 1$ 이고, $(1+1)!-1 = 2-1 = 1$ 이므로, 식이 성립한다.

$n=j$ 일 때, 식 $\sum_{k=1}^{j} k\times k! = (j+1)!-1$ 이 성립한다고 가정하면,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+1} k\times k! &= (j+1)\times(j+1)! + \sum_{k=1}^{j} k\times k! \\ &= (j+1)\times(j+1)! + (j+1)!-1 \\ &= (j+2)\times(j+1)!-1 \\ &= (j+2)!-1\end{aligned}$$

이므로, $n=j+1$ 일 때에도 식이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여 식 $\sum_{k=1}^{n} k\times k! = (n+1)!-1$ 가 성립한다.

<문제 5 풀이>

주어진 자연수 P에 대하여 $n! \le M < (n+1)!$ 을 만족하는 자연수 n은 단 하나 존재하고, 이것이 P의 팩토리얼 진법 표현의 자리의 개수가 되는 이유는 $(n-1)$개 이하의 자리로 표현되는 최대 자연수는 $\sum_{k=1}^{n-1} k \times k! = n!-1 < n!$이고, $(n+1)$개 이상의 자리로 표현되는 최소 자연수는 $1\overbrace{000\cdots0}^{n\text{개}}{}_{(!)} = (n+1)!$이기 때문이다. 만일 P에 대하여 서로 다른 두 가지 팩토리얼 진법 표현이 존재한다면, 그것을

$$P = (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)_{(!)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \times k! \quad \text{................ (1)}$$

$$P = (b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1)_{(!)} = \sum_{k=1}^{n} b_k \times k! \quad \text{................ (2)}$$

로 나타냈을 때, $a_k \ne b_k$인 k가 $1, 2, \cdots, n$ 중에 있을 것이고, 그 중 가장 큰 것을 m이라고 하자.

식(1)에서 식(2)를 빼면 $0 = P - P = \sum_{k=1}^{n} a_k \times k! - \sum_{k=1}^{n} b_k \times k! = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \times k!$이다. 여기서 (1)의 가장 오른쪽 변과 (2)의 가장 오른쪽 변의 차이를 나타내는 $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \times k!$ 이 0이 아니면 모순이다.

$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \times k!$ 에서, $k > m$인 k가 있다면 $a_k - b_k = 0$ 이므로, $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \times k! = \sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k) \times k!$ 이다.

먼저, $m = 1$인 경우는 $\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k) \times k! = (a_1 - b_1) \times 1! \ne 0$ 이다.

$2 \le m \le n$인 경우에는 $\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k) \times k! = (a_m - b_m) \times m! + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - b_k) \times k!$ 와 같이 가장 높은 항과 나머지 항들의 합으로 분리하여 쓸 수 있다. 이 식에서, $(a_m - b_m)$는 0이 아닌 정수이므로, $|a_m - b_m| \ge 1$ 이다. 따라서 $|(a_m - b_m) \times m!| \ge m!$ 이다. 즉, 가장 높은 항 $(a_m - b_m) \times m!$ 의 절댓값은 $m!$ 이상이다. 그런데, $\sum_{k=1}^{m-1} (a_k - b_k) \times k!$ 에서 $-k \le a_k - b_k \le k$ 이므로, <문제 4>에서 증명한 식을 이용하면 나머지 항들의 합 $\sum_{k=1}^{m-1} (a_k - b_k) \times k!$ 의 절댓값은 $\left| \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - b_k) \times k! \right| \le \sum_{k=1}^{m-1} k \times k! = m! - 1 < m!$ 임을 얻는다.

따라서 $(a_m - b_m) \times m!$ 과 $\sum_{k=1}^{m-1} (a_k - b_k) \times k!$ 의 합이 0이 될 수가 없다.

그러므로 $m = 1$인 경우와 $2 \le m \le n$인 경우 모두 (1)의 가장 오른쪽 변과 (2)의 가장 오른쪽 변의 차가 0이 되지 않아서 모순이다. 따라서 자연수 P에 대하여 서로 다른 두 가지 팩토리얼 진법 표현이 존재할 수 없다.