2011학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 논술문제

지원학과 :	수험번호 :	성명 :

[제시문 1]은 <문제 1>, <문제 2>에 해당하며, [제시문 2]는 <문제 3>, <문제 4>, <문제 5>에 해당합니다. 각 제시문은 일반적인 과학, 수학적 원리를 담고 있습니다. 제시문을 잘 읽고 그 내용에 근거하여 수식과 논리를 명확히 전개하여 답하시오.

[제시문 1]

(가) 자연계에 존재하는 생물체와 무생물체 모두에서 원자, 분자, 이온 등의 산화-환원반응을 통해 다양한 현상이 일어난다. 여기서 산화-환원반응이란 원자 등이 전자를 잃거나 얻는 반응을 의미한다. 예를 들어, 어떤 수용액 내에서 아연(Zn)과 구리(Cu)를 이용한 산화-환원반응을 고려해 보자.

$$\mathrm{Zn}(s) + \mathrm{Cu}^{2+}(aq) \rightarrow \mathrm{Zn}^{2+}(aq) + \mathrm{Cu}(s) \quad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

여기서, (s)는 해당 물질이 고체 상태, (aq)는 수용액 상태임을 의미한다. 이 반응을 산화(전자를 잃는 것)가 관여한 반쪽 반응과 환원(전자를 얻는 것)이 관여한 반쪽 반응으로 나누어서 고려하면 다음과 같다.

$$\mathrm{Zn}(s) \rightarrow \mathrm{Zn}^{2+}(aq) + 2\mathrm{e}^- \qquad \cdots\cdots\cdots \ (2)$$

$$\mathrm{Cu}^{2+}(aq) + 2\mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{Cu}(s) \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3)$$

식(2)는 Zn원자가 전자(e^-) 2개를 잃어 양이온 Zn^{2+}으로 변화했음을 의미하고, 전자를 잃었으므로 산화반응에 해당한다. 이와 반대로 식(3)은 양이온 Cu^{2+}가 전자 2개를 얻어서 Cu가 되었으므로 환원반응에 해당한다.

산화-환원반응으로 인해 생기는 전자의 이동을 이용하여 전류를 얻는 장치를 화학전지라 한다. 화학전지 내에서 일어나는 산화-환원반응은 항상 두 개의 반쪽 반응으로 나누어 질 수 있다. 즉, 산화전극(음극)에서는 식(2)와 같은 산화반응이 일어나고 환원전극(양극)에서는 식(3)과 같은 환원반응이 일어나므로, 두 전극을 전선으로 연결하면 산화전극(음극)에서 환원전극(양극)으로 전자가 이동한다. 전선을 통해 산화전극에서 전자를 끌어낼 수 있는 힘을 전지전위($\varepsilon_{전지}$) 또는 기전력이라고 하며, 단위는 볼트(V)이다. 전지전위($\varepsilon_{전지}$)는 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$\varepsilon_{전지} = \varepsilon^o_{전지} - \frac{0.0591}{n} \times \log_{10}(Q)$$

여기서, 표준전지전위($\varepsilon^o_{전지}$)는 표준상태(25℃, 1기압, 모든 수용액의 농도는 1M)에서의 전지전위로서 환원전극과 산화전극의 표준환원전위의 차이로부터 구할 수 있다. 즉, $\varepsilon^o_{전지} = \varepsilon^o_{(환원전극)} - \varepsilon^o_{(산화전극)}$이다. n은 산화-환원반응식에 관여한 전자의 수이다. 그리고 화학반응식이 $A(s) + b\mathrm{B}(aq) \rightarrow c\mathrm{C}(aq) + \mathrm{D}(s)$인 경우 반응지수 Q는 다음과 같이 구한다.

$$Q = \frac{[\mathrm{C}]^c}{[\mathrm{B}]^b}$$

위 반응식에서 b, c는 B, C의 반응계수이고 [B], [C]는 해당 물질의 초기 농도이다.

예를 들면, 식(1)에서 Cu^{2+}와 Zn^{2+}의 반응계수는 모두 1이며, 만약 Zn^{2+}의 농도가 Cu^{2+}의 100배라면 $Q = 100$이다. 그리고 산화전극(Zn)에서의 표준환원전위 $\varepsilon^o_{(산화전극)}$는 $-0.76\,V$이고, 환원전극(Cu)에서의 표준환원전위 $\varepsilon^o_{(환원전극)}$는 $0.34\,V$이므로, 표준전지전위($\varepsilon^o_{전지}$)는 $\varepsilon^o_{전지} = 0.34 - (-0.76) = 1.10(V)$가 된다. 마지막으로 식(2)와 (3)에서 볼 수 있듯이, 산화-환원반응에 이동한 전자의 수(n)는 2이므로 전지전위($\varepsilon_{전지}$)는 $\varepsilon_{전지} = 1.10 - \frac{0.0591}{2} \times 2 = 1.0409(V)$이다.

자연계열 논술문제

(나) 화학전지에서 전기에너지를 만드는 데 사용되는 산화-환원반응은 전자를 얻거나 잃어버리는 반응이다. 하지만 역사적으로 보면 '산화'라는 말은 산소와 결합하여 산화물을 만들 때 사용되었고, '환원'은 산화물에서 산소를 제거하여 원소를 만들 때 사용되었다. 예를 들어, 공기 중에 노출된 철이 부식되는 과정을 살펴보자(철이 부식되면 철의 강도가 급격히 약해진다). 부식과정에서 철은 다음과 같이 산소와 결합하여 산화철이 된다.

$$4Fe + 3O_2 + 2H_2O \rightarrow 2Fe_2O_3 \cdot 2H_2O$$

이 반응을 산화반응이라고 하는데, 이는 철이 대기 중의 산소에 노출되면 산소에 비해 전자를 밀어내는 힘이 강해서 전자를 산소에 잃게 되고, 그 과정을 거쳐 산화철이라는 새로운 분자로 변형되는 데에 기인한다. 결국 철의 입장에서는 산화반응이 되고, 산소의 입장에서는 환원반응이 된다. 결과적으로 어떤 물질이 산소와 결합하거나 또는 같은 의미로 전자를 잃는 것을 산화반응이라 하고, 그 반대를 환원반응이라 한다.

다음은 실생활에서 쉽게 발견할 수 있는 산화-환원반응의 몇 가지 예이다. 껍질을 깎은 과일을 공기 중에 일정시간 놓아두면 갈색으로 변한다. 이는 과일이 껍질에 둘러싸여 있을 때보다 쉽게 산화되기 때문이다. 은(Ag)은 다른 물질에 비해 산화반응이 천천히 일어나므로 구리(Cu) 반지에 은도금을 하면 반지의 표면에서 전자의 이동, 즉 공기와의 결합으로 인한 부식을 지연시킬 수 있다. 또한 은과 구리 사이에도 산화-환원반응이 일어나기 어렵기 때문에, 반지의 구조를 안정적으로 유지할 수 있다. 은도금을 하기 위한 방법으로 금속의 반응성을 이용한 산화-환원반응을 이용하게 된다. 환원전극에 은 조각을 연결하고, 산화전극에는 구리반지를 연결하여 은이온이 녹아 있는 수용액에 담가 두어 전류를 흐르게 한다. 그러면 은 조각 표면에서는 산화반응에 의해 은이온이 수용액에 녹아들고, 반지의 표면에서는 환원반응이 일어나 구리반지에 은이 도금된다. 차나무의 어린잎을 따서 만드는 차 가운데, 산화차는 산화반응을 통해 얻어지게 된다. 이러한 반응이 최적의 상태에서 이루어지게 하려면 일정시간 동안 습도가 높고 산소가 풍부한 공기를 공급해 주어야 한다. 그리고 찻잎이 산소와 접촉하는 표면적을 높이기 위해 작은 크기로 잘게 잘라 놓아야 한다. 산화반응이 진행되는 동안 찻잎 내의 폴리페놀이라는 물질이 산소와 결합하여 독특한 향과 맛을 내는 성분으로 변하게 된다. 대표적인 산화차로는 홍차가 있다. 그 외의 산화-환원반응의 예로, 표백제 등과 같이 특정 색깔을 띠게 하는 물질에서 전자들을 제거하여 특정 파장의 빛을 흡수하지 못하게 하거나, 가정용 액화천연가스가 연소하면서 많은 열과 빛을 발산하는 것, 그리고 불꽃놀이에서 마그네슘이 산소와 결합하여 엄청난 양의 빛을 내는 것 등을 들 수 있다.

<문제 1> 다음과 같은 조건으로 산화-환원반응을 통해서 화학전지를 구성하였을 때, 전지 전위를 구하고 그 과정을 기술하시오.

- 산화-환원반응식: $3Mg(s) + 2Al^{3+}(aq) \rightarrow 3Mg^{2+}(aq) + 2Al(s)$
- 표준환원전위: $\mathcal{E}^o_{(산화전극)} = -2.37\ V$, $\mathcal{E}^o_{(환원전극)} = -1.66\ V$
- 반응물과 생성물의 초기농도: $[Al^{3+}] = 1\,M$, $[Mg^{2+}] = 0.1\,M$

<문제 2> 철판을 잘라서 어떤 기구를 조립했다고 하자. 이 기구를 안정적으로 잘 유지하기 위한 방법들을 산화-환원반응의 원리에 기초하여 제시하고 그 이유를 논리적으로 설명하시오.

2011학년도 수시 1차 논술고사

자연계열 논술문제

[제시문 2]

(가) 큰 자연수를 나타낼 때, 어떤 수의 거듭제곱을 사용하면 편리한 경우가 있다. 예를 들어, 30400000은 오른쪽 끝으로부터 연속하여 5개의 0이 나타나므로 10의 거듭제곱을 이용하여 나타내면 $30400000 = 304 \times 10^5$이다. 다른 경우로 29282는 11의 거듭제곱을 이용하여 $29282 = 2 \times 11^4$과 같이 나타낼 수 있다.

자연수 100의 팩토리얼, 즉 $100! = 100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 2 \times 1$을 계산하여 십진법 수로 표현했을 때, 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0의 개수를 구하여 보자. 1에서 100까지의 수 각각을 소인수분해할 때, 소인수 5는 5의 배수마다 한 번씩 나오고, 또 5^2의 배수마다 한 번씩 더 나오므로, 100!의 소인수분해에 나타나는 2의 지수를 p, 5의 지수를 q라고 하면, $q = \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{25}\right] = 20 + 4 = 24$이고, $p > q$이다. (이 식에서 기호 $[x]$는 x 이하의 정수 중 가장 큰 것을 뜻한다.) 따라서 100!의 약수 중에서 10의 거듭제곱 꼴로서 지수가 가장 큰 것은 $10^q = 10^{24}$이고, 100!의 십진법 수 표현에서 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0은 24개이다.

(나) 수를 표현하는 다른 방법으로 12진법을 생각해보자. 예를 들어, 12진법으로 표현한 네 자리 수 $abcd_{(12)}$는 십진법 수로 $abcd_{(12)} = a \times 12^3 + b \times 12^2 + c \times 12 + d$와 같이 계산된다. 어떤 자연수를 12진법 수로 표현했을 때 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0의 개수를 구하려면, 그 자연수의 약수 중에서 12^r 꼴로서 지수 r이 가장 큰 것을 찾아야 한다.

이제, $100! = 100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 2 \times 1$을 12진법 수로 표현했을 때 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0의 개수를 구해보자. $12 = 2^2 \times 3$이므로, 100!의 소인수분해에 나타나는 2의 지수 p, 3의 지수 q를 구해보면 다음과 같다.

$$p = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

$$q = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{9}\right] + \left[\frac{100}{27}\right] + \left[\frac{100}{81}\right] = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$$

따라서 100!의 약수 중에서 12의 거듭제곱 꼴로서 지수가 가장 큰 것은 12^{48}이고, 100!의 12진법 표현에서 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0은 48개이다.

(다) 0 이상의 정수를 표현하는 방법으로 1!의 자리, 2!의 자리, 3!의 자리, 4!의 자리, $\cdots$ 등을 사용하는 팩토리얼 진법이 있다. 팩토리얼 진법의 n자리 수 $(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)_{(!)}$는 십진법 수로 $(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)_{(!)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \times k!$과 같이 계산된다. 여기에서 가장 높은 자리인 $n!$의 자리의 수 a_n은 $1, 2, \cdots, n$ 중 하나이고, $k < n$이면 $k!$의 자리의 수 a_k는 $0, 1, 2, \cdots, k$ 중 하나이다.

예를 들어, $1320_{(!)} = 1 \times 4! + 3 \times 3! + 2 \times 2! + 0 \times 1! = 24 + 18 + 4 = 46$을 나타낸다. 그리고 팩토리얼 진법으로 표현한 네 자리 수 가운데 가장 큰 자연수는 $4321_{(!)} = 4 \times 4! + 3 \times 3! + 2 \times 2! + 1 \times 1! = 96 + 18 + 4 + 1 = 119$이다. 팩토리얼 진법에서 10!의 자리 이상은 그 자리의 수가 10 이상이 될 수 있으므로, $10, 11, 12, \cdots$를 다른 기호, 예를 들어 알파벳 $\mathrm{A, B, C}, \cdots$ 등으로 나타내어 $\mathrm{BA070000010}_{(!)} = 11 \times 11! + 10 \times 10! + 7 \times 8! + 1 \times 2!$과 같이 표현한다. 하지만 자리가 높아질수록 그 자리에 쓸 수 있는 수들을 나타낼 기호가 점점 더 많이 필요하게 된다는 단점이 있다.

하나의 자연수에 대한 팩토리얼 진법 표현은 유일하다. 이 사실은 팩토리얼 진법으로 표현된 n자리 수 P는 n이 아닌 다른 개수의 자리들로는 표현할 수 없음을 보이고, 이후 P가 n자리의 다른 팩토리얼 진법 표현을 가진다고 가정하면 모순이 생김을 보임으로써 증명할 수 있다.

자연계열 논술문제

<문제 3> 팩토리얼 진법으로 표현한 수 $10120_{(!)}$을 십진법 수로 나타내시오.
그리고, 그 수의 팩토리얼을 계산하여 30진법 수로 표현했을 때 오른쪽 끝으로부터 연속하여 나타나는 0의 개수를 구하고, 그 과정을 설명하시오.

<문제 4> 모든 자연수 n에 대하여 다음 식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

<문제 5> 어떤 자연수 P에 대하여 다음과 같이 서로 다른 두 가지 팩토리얼 진법 표현이 존재한다고 가정하자.

$$P = \left(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1\right)_{(!)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \times k! \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

$$P = \left(b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1\right)_{(!)} = \sum_{k=1}^{n} b_k \times k! \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

그러면 (1)과 (2)의 두 표현에서 같은 자리의 수를 비교할 때 서로 다른 값이 나오는 자리가 있어야 한다.
이 중 가장 높은 자리를 $m!$의 자리라고 하자. 즉, $a_m \neq b_m$이고, $k > m$인 k가 있다면 $a_k = b_k$이다.
이 사실과 <문제 4>에서 증명한 식을 이용하여, (1)의 가장 오른쪽 변과 (2)의 가장 오른쪽 변의 차가 0이 되지 않는 모순이 있음을 보이시오.