2010학년도 수시 1차 논술고사

자연계 논술
출제의도 및 문제해설

1. 출제의도

본교의 2010학년도 수시모집 자연계 논술고사 문제는 고등학교 과정을 이수한 학생이라면 해결할 수 있는 내용으로 미생물의 생장과 사멸 원리를 이해하고 식품의 부패를 방지하는 방법을 추론하는 문제([제시문 1])와 실험이나 조사를 통해 얻은 두 가지 자료에 대한 분포 경향을 근사적으로 잘 나타내는 직선의 방정식을 구하는 방법에 관한 문제([제시문 2])로 이루어져 있다.

주어진 제시문에서 수학적 기본개념과 과학적 원리를 이해하고 이를 바탕으로 이들 개념을 적용한 현상의 분석력과 논리적 설명력을 평가하는 것이 본 논술고사의 출제의도이다.

2. 문제해설

<문제 1 풀이>

생장 가능한 온도 이상에서는 온도가 높아질수록 미생물은 더 빠르게 사멸한다. 그림을 이용하여 서로 다른 두 온도(63℃와 73℃)에서의 D값(살아 있는 미생물의 수가 10분의 1로 줄어드는데 걸리는 시간)을 각각 구한 후, 이를 바탕으로 83℃에서 미생물의 수를 밀리리터(㎖) 당 4,000개에서 4개로 줄이는 데 필요한 최소시간을 구한다.

- 63℃에서의 D값

그림에서 미생물A 10^4개가 10^3개, 10^2개, 10개로 줄어드는 데 걸리는 시간이 각각 10분, 20분, 30분이므로 D값(10분의 1로 미생물 수가 줄어드는 데 걸리는 시간)은 10분이다.
또는 D값은 그림에서 직선 기울기의 절댓값의 역수이다. 63℃에서 기울기는 -3/30이므로 D값은 10분이 된다.

- 73℃에서의 D값

그림에서 미생물A 10^4개가 10^3개, 10^2개, 10개로 줄어드는 데 걸리는 시간이 각각 1분, 2분, 3분이므로, 이 온도에서의 D값은 1분이다.
또는 73℃에서 직선의 기울기를 구하면 -3/3이므로 D값은 1분이 된다.

- 미생물A의 Z값 구하기

Z값은 D값을 10분의 1로 줄이기 위하여 높여야 할 온도 변화 값이다. 즉, 그림에서 63℃에서의 D값이 10분이고 73℃에서의 D값이 1분이므로 Z값은 10℃(73℃ - 63℃)이다.

- 83℃에서 미생물A 4,000개/㎖를 4개/㎖로 줄이는 데 필요한 최소시간 구하기

미생물A의 Z값이 10℃이므로 83℃에서의 D값은 73℃에서의 D값의 10분의 1이다. 73℃에서의 D값이 1분(60초)이므로 83℃에서의 D값은 0.1분(6초)이다.
그러므로, 83℃에서 미생물A의 수를 1000분의 1(4000개/㎖에서 4개/㎖)로 줄이기 위해서는 0.3분

(18초(6초 × 3))이 필요하다.
또는 83℃에서의 기울기는 -10이므로 미생물A가 4,000개에서 4개로 줄어들 때 걸리는 시간을 x 라 하면,

$$\frac{\log_{10}(4)-\log_{10}(4000)}{x} = \frac{\log_{10}(4)-[\log_{10}(1000)+\log_{10}(4)]}{x} = -\frac{3}{x} = -10$$ 이므로,

$x = 0.3$분이다.

<문제 2 풀이> 식품의 부패를 막기 위해서는 미생물의 생장을 억제하거나, 존재하는 미생물을 사멸시키는 방법이 있다. 이를 위해서는 제시문에 언급된 미생물 번식에 필요한 환경요인인 온도, 수분, 수소이온농도(pH), 산소에 대하여 미생물 번식을 억제하는 조건을 주면 된다.

식품의 부패를 막기 위한 구체적인 방법으로 온도를 미생물이 번식하는 최적온도를 벗어나게 하면 된다. 온도를 낮출수록 미생물의 생장속도가 낮아지므로 식품을 냉장·냉동하면 부패속도를 늦출 수 있다. 식품을 미생물 사멸온도 이상으로 가열하면 미생물의 수가 줄어들기 때문에 부패를 억제할 수 있다. 수분도 미생물 증식에 필요하기 때문에 식품의 수분을 없애기 위해 식품을 건조한다. 또한 삼투압 차이에 의해 미생물은 수분을 흡수할 수 있기 때문에 식품을 소금이나 설탕 등에 절임을 하여 수분 흡수를 저해함으로써 생장을 억제시킨다. 식초와 같은 산을 첨가하여 식품의 pH를 미생물이 생장하는 영역을 벗어나게 한다. 또한 일반적으로 식품의 부패를 일으키는 미생물인 호기성균의 생장을 억제하기 위해 식품을 밀봉, 진공포장을 해서 산소를 차단한다.

결론적으로 식품의 부패를 막기 위한 방법은 식품을 가열하거나, 냉장·냉동, 건조, 소금이나 설탕 절임, 산의 첨가, 밀봉, 진공포장 등의 방법을 들 수 있다.

<문제 3 풀이> 제시문에서 주어진 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n)에 대하여 함수 $S(a,b)$를 최소화하는 (a,b)의 값을 구하면 다음과 같다고 하였다.

$$a = \frac{E(xy)-E(x)E(y)}{E(x^2)-[E(x)]^2}, \qquad b = E(y)-aE(x) \qquad \text{.....................................①}$$

이 문제에서 주어진 3개의 점 $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$에 대하여 함수 $S(a,b)$를 최소화하는 (a,b)를 식 ①을 이용하여 찾아서, 새로 건설할 도로를 나타내는 직선 $y = ax + b$를 구한다.

$$E(x) = \frac{0+1+2}{3} = 1, \quad E(y) = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}, \quad E(xy) = \frac{0+1+2}{3} = 1, \quad E(x^2) = \frac{0+1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

이므로,

$$a = \frac{E(xy)-E(x)E(y)}{E(x^2)-[E(x)]^2} = \frac{1-1\times\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}-1^2} = \frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2}, \qquad b = E(y)-aE(x) = \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{6}$$ 이다.

따라서 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$가 새로 건설할 도로를 나타내는 직선의 방정식이다.

<문제 4 풀이> 먼저, a, b에 관한 이차함수 $S(a,b)$의 각 항의 계수를 확인하여야 한다.

$$S(a,b) = a^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2a\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + 2ab\sum_{k=1}^{n} x_k - 2b\sum_{k=1}^{n} y_k + nb^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$
$$= pa^2 - qa + rab - sb + tb^2 + u$$

함수 $S(a,b)$를 최소로 하는 (a,b)를 구하기 위한 식 $\begin{bmatrix} 2p & r \\ r & 2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix}$을 풀면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p & r \\ r & 2t \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{4pt - r^2}\begin{bmatrix} 2t & -r \\ -r & 2p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{4pt - r^2}\begin{bmatrix} 2tq - rs \\ -rq + 2ps \end{bmatrix}$$

따라서

$$a = \frac{2tq - rs}{4pt - r^2} = \frac{4n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - 4\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} y_k}{4n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} y_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{E(x^2) - [E(x)]^2}$$ 이

고,

$$b = \frac{2ps - rq}{4pt - r^2} = \frac{4\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k - 4\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{4n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}$$
$$= \frac{E(x^2)E(y) - E(x)E(xy)}{E(x^2) - [E(x)]^2}$$

이므로, $E(y) - aE(x) = E(y) - \dfrac{E(xy) - E(x)E(y)}{E(x^2) - [E(x)]^2} \times E(x) = \dfrac{E(y)E(x^2) - E(x)E(xy)}{E(x^2) - [E(x)]^2} = b$ 이다.

따라서 함수 $S(a,b)$를 최소화하는 (a,b)는 제시문의 식 ①을 만족한다.

<문제 5 풀이> 문제 조건의 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - E(x))^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - 2E(x)x_k + [E(x)]^2\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2E(x)\sum_{k=1}^{n} x_k + n[E(x)]^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2nE(x)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + n[E(x)]^2 = nE(x^2) - 2n[E(x)]^2 + n[E(x)]^2$$
$$= nE(x^2) - n[E(x)]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - E(x))(y_k - E(y)) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k y_k - x_k E(y) - y_k E(x) + E(x)E(y)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - E(y)\sum_{k=1}^{n} x_k - E(x)\sum_{k=1}^{n} y_k + nE(x)E(y)$$
$$= nE(xy) - nE(y)E(x) - nE(x)E(y) + nE(x)E(y) = nE(xy) - nE(y)E(x)$$

따라서 식 ①을 이용하면 $a = \dfrac{E(xy) - E(x)E(y)}{E(x^2) - [E(x)]^2} = \dfrac{1840}{2300} = 0.8$이고,

$b = E(y) - aE(x) = 52 - 0.8 \times 94 = -23.2$이다.

즉, 20대 여성의 다리 길이 x와 팔 길이 y사이에는 근사적으로 $y = 0.8x - 23.2$

인 관계가 성립한다.

이 식에서 다리 길이가 100 cm인 20대 여성의 팔 길이는 56.8 cm 정도라고 할 수 있다.