



자연계 논술 출제의도 및 문제해설

1. 출제의도

본교의 2009학년도 수시모집 자연계 논술고사 문제는 인구증가의 주요 지표인 합계 출산율이 그 문화에서 이상적으로 생각하는 자녀수와 성별 구성에 따라 어떻게 달라지는지 알아보는 문제([제시문 1])와 호흡을 통해 외부 산소를 조직세포로 공급하는 원리에 대한 문제([제시문 2])로 이루어져있다.

[제시문 1]의 문제는 도표와 무한급수를 통해 원하는 자녀 숫자가 합계출산율에 어떻게 영향을 주는 지에 대해 제시문의 기본개념을 충실히 적용하여 요구하는 수식을 명확하게 기술하여야 한다. [제시문 2]의 문제는 산소의 조직세포 운반 원리와 헤모글로빈의 산소해리 곡선을 이용하여 자료의 정확한 이해를 바탕으로 수학적 원리를 적용하고 과학적 지식에 근거하여 논리적인 추론을 전개하여야 한다.

주어진 제시문을 근거로 수학적 기본개념과 과학적 원리를 이해하고 이들 개념을 적용한 현상의 분석과 논리적 설명력을 평가하는 것이 본 논술고사의 출제의도이다.

2. 문제해설

<문제1 풀이> 제시문 <예2>의 무한급수의 부분합

$S_n = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \dots + (n+1) \times \frac{1}{2^n}$ 은 처음 몇 개의 항들과 마지막 n 번째 항 사이에 생략기호 ...를 써서 어떠한 항들이 더해져 있는지를 보여 주고 있다. 제시문의 <예1>에서 부분합을 간단히 정리했던 방법을 비슷하게 이용하여 S_n 을 생략기호 ...가 없는 간단한 식으로 나타내고, 이로부터 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 를 구하게 되는 과정을 서술해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + \dots + (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \text{이므로} \\ \therefore S_n - \frac{1}{2}S_n &= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} - (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

따라서 $S_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$ 이라는 것을 얻게 되고, 이로부터 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 구한다.

$S_n = 3 - \frac{n+3}{2^n} = 3 - \frac{n}{2^n} - \frac{3}{2^n}$ 에서 <예1>의 내용으로부터 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ 이고, 등비수열의 성질로부터 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2^n} = 0$ 이므로 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$ 이다. 즉, 한 가정 당 평균 자녀수 S 는 3임을 보이게 된 것이다.

<문제2 풀이> 지문 <예3>의 나뭇가지모양의 도표를 참조하여 확률을 구한다.

어느 가정이 두 자녀 가정이 되기 위해서는 BB 이어야 하므로, 그 확률은 $\frac{1}{4}$ 이고,

세 자녀 가정이 되기 위해서는 BGB 또는 GBB 이어야 하므로, 그 확률은 $\frac{2}{8}$ 이고,

네 자녀 가정이 되기 위해서는 $BGGB$, $GBGB$ 또는 $GGBB$ 이어야 하므로, 그 확률은 $\frac{3}{16}$ 이다.

자녀수 n 에 대하여 어느 가정이 $(n+1)$ 자녀 가정일 확률은 $\frac{n}{2^{n+1}}$ 이다.

따라서 한 가정 당 평균 자녀수 S 는 다음과 같다.

$$S = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{3}{16} + \dots + n(n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

또는 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$ 으로 나타낼 수 있다.

<문제3 풀이> 오른쪽 나뭇가지모양도표를 그려 확률을 구한다. 어느 가정이 한 자녀 가정이 될 확률은 0, 두 자녀 가정이 될 확률은 $\frac{3}{4}$, 세 자녀 가정이 될 확률은 $\frac{1}{8}$, ..., $(n+1)$

$(n \geq 2)$ 자녀 가정이 될 확률은 $\frac{1}{2^{n+1}}$ 이다.

따라서 자녀의 수가 얼마든지 많을 수 있다고 가정한다면 이 나라의 한 가정 당 평균 자녀수 S 는 다음과 같이 무한급수로 나타난다.

$$S = 2 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + \dots + (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

이 무한급수의 처음 n 항의 합인 부분합 S_n 을 위 지문의 <예1>에서 보인 등식 $2 - \frac{n+2}{2^n} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + \dots + n \times \frac{1}{2^n}$ 을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
S_n &= 2 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + \dots + (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{3}{2} - 1 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} + (1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + \dots + n \times \frac{1}{2^n}) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{3}{2} - 1 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} + (2 - \frac{n+2}{2^n}) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{5}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

이로부터 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.5$ 임을 알 수 있다. 따라서 이 나라의 이론적 합계출산율은 2.5이다.

<문제4 풀이>

헤모글로빈의 산소포화도는 주변의 산소분압에 의해 결정된다. 그러므로 헤모글로빈의 산소포화도를 동맥의 산소분압과 정맥의 산소분압에서 각각 구한 후, 그 차이를 구하면 헤모글로빈으로부터 해리되는 산소의 양이 된다. 즉, 헤모글로빈이 조직에 공급하는 산소의 양이 되는 것이다. 정맥의 산소분압은 일정한 반면, 동맥의 산소분압은 외부의 산소분압에 따라 달라지므로 고도가 변하면 헤모글로빈이 조직에 공급하는 산소 양이 변하게 된다.

- 4mM DPG 농도에서의 조직에 공급되는 산소의 양

(해수면)

그림에서와 같이 4mM DPG 농도에서는 해수면 높이에서 헤모글로빈의 산소포화도 차이가 38%이다. 혈액 100mL 당 헤모글로빈의 양이 15g이고, 헤모글로빈 1g 당 산소와 100% 결합했을 때 산소의 양이 1.5 ml이므로, 혈액 100ml에 존재하는 헤모글로빈의 38%가 조직에 방출한 산소의 양을 계산하면 $15 \times 1.5 \times 0.38 = 8.55(\text{ml})$ 이다.

(해발 4,500m)

하지만 해발 4,500m에서는 동맥과 정맥에서의 산소포화도 차이가 30% 밖에 되지 않으므로, 조직에 방출한 산소의 양의 $15 \times 1.5 \times 0.30 = 6.75(\text{ml})$ 로 줄어들게 된다. 즉, 조직세포들이 산소 부족을 겪는다.

- 8mM DPG 농도에서의 조직에 공급되는 산소의 양

(해수면)

그림에서와 같이 8mM DPG 농도에서는 해수면 높이에서 헤모글로빈의 산소포화도 차이가 52%이다. 조직에 방출된 산소의 양은 $15 \times 1.5 \times 0.52 = 11.7(\text{ml})$ 이다.

(해발 4,500m)

DPG 농도가 8mM로 증가하면 해발 4,500m에서 동맥과 정맥에서의 산소포화도 차이가 37%이므로 조직에 방출한 산소의 양은 $15 \times 1.5 \times 0.37 = 8.325(\text{ml})$ 이다.

해발 4500m에서 DPG 농도가 8mM로 증가하는 이유는 해수면에서 4mM DPG 농도에서의 조직에 공급되는 산소의 양(8.55(ml))과 해발 4,500m에서 조직에 공급되는 산소의 양

(8.325(ml))이 차이가 거의 없기 때문이다. 즉, 조직세포들이 고도 차이에 의한 산소 부족을 겪지 않게 된다.

<문제5 풀이> 해발 고도가 높은 지역은 외부 공기의 압력이 줄어들어 산소 분압이 낮아져 저산소증을 유발하게 된다. 저산소증이 발생하게 되면 우리 몸은 저산소증을 보상하는 반응들이 나타난다. 이러한 반응들로는 제시문에 언급했듯이

- 흡기되는 공기 중 산소의 양을 증가시키기 위해 ①호흡을 깊게 하고 ②호흡 횟수를 늘린다.

- 산소가 혈액으로 이동되는 것을 증가시키기 위해 ③혈액 중 적혈구 수가 증가되고 ④적혈구 안의 헤모글로빈의 양이 증가 된다.

- 조직으로 가는 혈류 양을 증가시키기 위해 ⑤심박수(맥박)가 증가하게 되고 ⑥혈압이 증가되는 반응이 나타난다.