

2009학년도 수시2-1 논술고사

자연계열 논술문제

지원학과 :	수험번호 :	성명 :
--------	--------	------

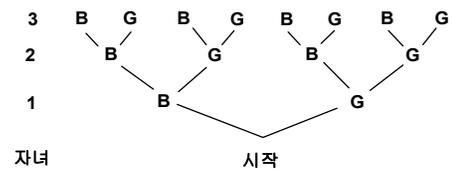
[제시문 1]은 <문제 1>, <문제 2>, <문제3>에 해당하며, [제시문 2]는 <문제 4>, <문제 5>에 해당합니다. 각 제시문은 일반적인 과학, 수학적 원리를 담고 있습니다. 제시문을 잘 읽고 그 내용에 근거하여 수식과 논리를 명확히 전개하여 답하시오.

[제시문 1]

보건 의료 기술의 발달로 수명이 높아지면서 세계 인구는 폭발적으로 늘어나, 1890년에 세계 인구가 10억이 된 이후로 현재까지 매 10~12년마다 약 10억씩 증가하고 있다. 현재의 인구에 도달하기까지 인류 역사의 전 기간이 걸렸던 것에 비교하여, 현재의 인구증가 추세가 지속된다면 겨우 47년 정도 만에 현재의 두 배가 될 것이다. 수학적 모델을 이용하면 인구증가에 대한 예측을 하고, 요인들이 달라짐에 따라 인구를 추정할 수 있는 일반적인 방법을 제시하여 인구문제를 해결하기 위한 전략을 세우는데 도움을 줄 수 있다.

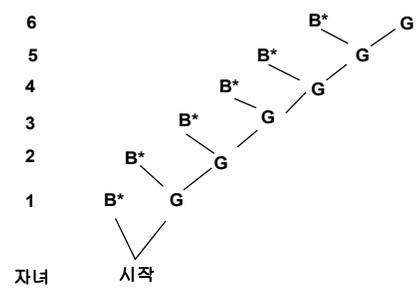
여성 한 명당 가임기간 동안 출산하는 총 자녀수를 나타내는 합계출산율은 인구증가의 주요한 지표이다. 한 나라의 합계출산율에 영향을 미치는 요인들은 가족계획을 추진하는 강도와 국민들의 호응정도 등 여러 가지가 있지만, 특히 그 나라의 문화에서 이상적으로 생각하는 자녀의 수와 성별구성이 중요하다.

남아와 여아의 출생 확률이 같다고 가정하고, 나뭇가지 모양의 도표와 무한급수를 통해 원하는 자녀 숫자가 합계출산율에 어떻게 영향을 주는지에 대하여 알아보자. (아래의 그림들에서 B는 남아, G는 여아를 나타내며, *표는 그 단계에서 출산을 멈춘다는 뜻이다.) 오른쪽 그림에서와 같이, n명의 자녀에 대한 남녀 구성 방법은 모두 2^n 가지이다. 예를 들어, 3명의 자녀에 대한 남녀 구성 방법은 모두 $2^3 = 8$ 가지이고, 이 중 딸 2명, 아들 1명을 가지는 경우는 3가지이므로, 그 확률은 $\frac{3}{8}$ 이다.



다음의 <예1>, <예2>, <예3>에서 이상적으로 생각하는 자녀의 수와 그 성별 구성이 다른 세 경우를 각각 설정하고, 합계출산율이 어떻게 다른지에 대하여 알아보자.

<예1> 어떤 나라에서 모든 여성이 결혼하고 노후에 부양할 아들 한 명을 원하여, 각 여성이 아들을 한 명 얻을 때까지 계속 자녀를 출산하고, 그 이후로는 더 이상 출산하지 않는다고 하자. 이 나라의 합계출산율은 얼마인지 알아보기 위하여 오른쪽 그림과 같은 나뭇가지 모양의 도표를 그렸다.



도표로부터 첫 번째 자녀에서 출산을 멈추어 한 자녀 가정일 확률은 $\frac{1}{2}$,

두 번째 자녀에서 출산을 멈추어 두 자녀 가정일 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \dots,$

n자녀 가정일 확률은 $\frac{1}{2^n}$ 이다. 따라서 자녀의 수가 얼마든지 많을 수 있다고 가정한다면 이 나라의 한 가정 당 평균 자녀수 S는 다음과 같이 무한급수로 나타난다.

$$S = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + \dots + n \times \frac{1}{2^n} + \dots$$

이 무한급수의 합을 구하기 위해서는 처음 n항의 합인 부분합 S_n 을 찾아 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 구하여야 한다. 부분합 S_n 은 다음과 같이 계산하여 간단히 얻을 수 있다.

<다음 페이지에 제시문 1 계속>

자연계열 논술문제

[제시문 1] - 계속

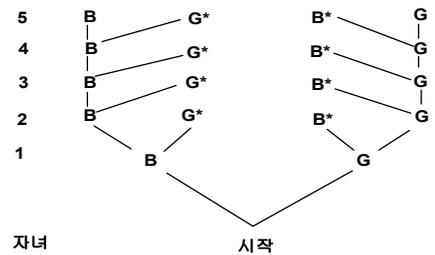
$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + \dots + n \times \frac{1}{2^n} \\
 \frac{1}{2}S_n &= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} + \dots + n \times \frac{1}{2^{n+1}} \\
 \therefore S_n - \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} - n \times \frac{1}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} - n \times \frac{1}{2^{n+1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \\
 &= 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

따라서 $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ 이므로 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$ 이다. 이로부터 이 나라의 이론적 합계출산율은 2가 되는 것을 알 수 있다. 즉, 이 나라에서는 여성 한명 당 평균 2명의 자녀를 갖게 된다는 것이다.

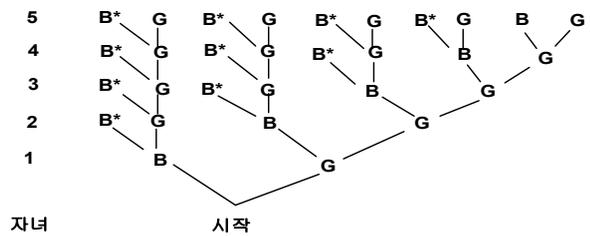
<예2> 어떤 나라에서 모든 여성이 결혼하고 아들 한 명과 딸 한 명을 원하여, 이 조건이 갖추어질 때까지 계속 자녀를 출산하고, 그 이후로는 더 이상 출산하지 않는다고 할 때, 이 나라의 합계출산율을 구하여보자.
 이 경우 어느 가정의 한 자녀 가정의 확률은 0, 두 자녀 가정의 확률은 $\frac{1}{2}$, ..., $(n+1)$ 자녀 가정의 확률은 $\frac{1}{2^n}$ 이므로, 한 가정 당 평균 자녀수 S 는 다음과 같다.

$$S = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \dots + (n+1) \times \frac{1}{2^n} + \dots$$

이 무한급수의 처음 n 항의 합인 부분합 S_n 을 <예1>에서와 비슷한 방법으로 구해보면 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$ 임을 알 수 있다. 따라서 이 나라의 이론적 합계출산율은 3이다.



<예3> 어떤 나라에서 모든 여성이 결혼하고 아들 두 명을 원하여, 각 여성이 아들을 두 명 얻을 때까지 계속 자녀를 출산하고, 그 이후로는 더 이상 출산하지 않는다고 할 때, 한 가정 당 평균 자녀수 S 를 무한급수로 나타내고, 그 급수의 처음 n 항의 합인 부분합을 구해보면 $S_n = 4 - \frac{n^2 + 5n + 8}{2^{n+1}}$ 이다. 여기서



$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ 이므로 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4$ 임을 알 수 있다. 따라서 이 나라의 이론적 합계출산율은 4이다.

위의 <예2>와 <예3>으로부터 아들 한 명과 딸 한 명을 원하는 대신 아들 둘을 원할 때, 합계출산율이 3에서 4로 높아져 인구증가에 심각한 영향을 미치게 됨을 알 수 있다.

자연계열 논술문제

<문제 1> 앞 제시문의 <예2>에서 무한급수의 처음 n 항의 합인 부분합은 다음과 같다.

$$S_n = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \cdots + (n+1) \times \frac{1}{2^n}$$

이 S_n 을 <예1>에서와 같이 간단한 수식으로 나타내고, 이로부터 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$ 이 되는 이유를 제시문에 근거하여 서술하시오.

<문제 2> 앞 제시문의 <예3>에서 자연수 n 에 대하여 어느 가정이 $(n+1)$ 자녀 가정이 될 확률을 구하여, 한 가정 당 평균 자녀 수 S 를 무한급수로 나타내고, 그 근거와 과정을 논리적으로 서술하시오.

<문제 3> 어느 나라에서 각 여성이 원하는 자녀의 수는 2명이다. 단, 자녀 둘이 모두 딸인 경우 아들을 낳을 때까지 계속 출산하고, 그 이후로는 더 이상 출산하지 않는다고 할 때, 이 나라의 이론적 합계출산율을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

자연계열 논술문제

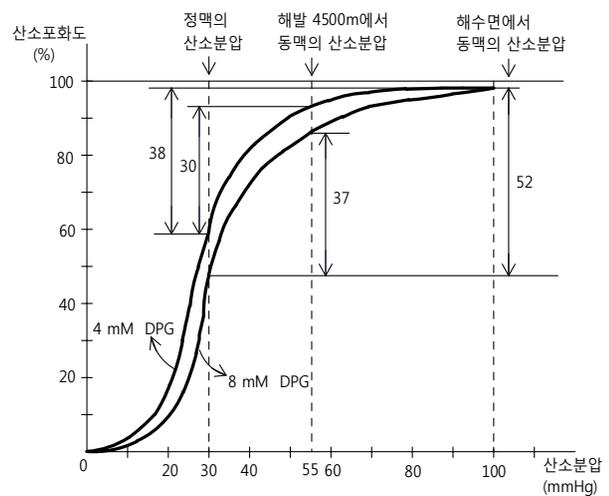
[제시문 2]

산소는 지구 상 생명체에게 가장 중요한 원소 중의 하나이다. 많은 생명체에서 사용되는 대부분의 에너지 생성에는 산소가 소모되기 때문에, 산소는 외부의 환경으로부터 산소를 필요로 하는 생명체의 세포들 안으로 끊임없이 공급되어야 한다. 산소결핍은 흡기되는 공기 중의 산소 농도, 산소가 혈액으로 이동되는 정도, 산소를 운반하는 헤모글로빈의 양, 조직으로 가는 혈류의 조절, 헤모글로빈의 산소 친화도 등과 관련이 있다. 그러면 산소는 어떻게 공기로부터 우리 몸에 흡수되어 산소를 소모하는 각 조직의 세포로 운반되는 것일까? 호흡을 통해 폐로 들어온 외부 공기 중의 산소는 혈액을 거쳐 조직세포로 공급된다.

폐의 산소분압은 호흡에 의해 영향을 받는다. 휴식상태에서 숨을 한 번 쉴 때마다 폐로 들어오고 나가는 공기량을 일회 호흡량이라 하는데, 보통 500ml 정도이다. 폐는 숨을 내쉬어도 완전히 비워지지 않기 때문에 새로 들어온 공기는 폐에 존재하는 산소농도가 낮은 공기와 섞이게 되므로, 폐의 공기는 외부공기보다 산소의 분압이 낮다. 그러므로 휴식상태에서 외부공기의 산소분압이 150mmHg일 때 폐포의 산소분압은 100mmHg에 불과하다. 하지만, 호흡의 깊이와 호흡의 속도를 조절하면 외부공기의 산소분압이 변하지 않더라도 폐포의 산소농도를 변화시킬 수 있다. 이때 폐포와 혈액 사이에서 기체교환이 일어나는 기본원리는 분압차에 의한 확산이다.

이렇게 흡수된 산소는 혈액에 잘 녹지 못하므로, 산소의 운반은 호흡색소로 불리는 헤모글로빈 단백질을 이용한다. 혈액 속에 존재하는 적혈구 세포 안에는 산소와 결합할 수 있는 헤모글로빈이 한 개의 적혈구 안에 2~3억개 존재한다. 헤모글로빈(Hb)은 4개의 글로빈 단백질에 각각 1개의 헴(heme) 색소가 결합된 복합단백질로 1분자의 헤모글로빈에 최대 4분자의 산소가 결합할 수 있다. 폐의 모세혈관 안으로 확산된 산소는 적혈구 속의 헤모글로빈에 가역적으로 결합한다. 그 결과 생성된 산소 헤모글로빈(산소와 결합한 헤모글로빈, HbO₂)은 순환계를 통해 조직세포로 이동된다.

헤모글로빈이 산소와 결합되어 있는 비율(산소 포화도)은 주변의 산소분압에 의해 결정되므로 산소분압이 높은 폐에서는 산소헤모글로빈 비율이 높고, 산소분압이 낮은 조직에서는 산소가 해리된다. 이 과정은 헤모글로빈 분자를 이루는 각 단위체 간의 상호작용에 영향을 받으므로 산소분압에 따른 헤모글로빈의 산소 해리곡선은 직선이 아니라 그림과 같은 곡선이 된다. 이는 조직에서와 같이 산소분압이 낮은 조건에서는 산소의 분압이 조금만 변하여도 헤모글로빈에서 산소가 쉽게 결합하거나 해리되는 것을 의미한다. 뿐만 아니라 이산화탄소의 분압이 높을수록, pH가 낮을수록, 온도가 높을수록, DPG (2,3-디포스포글리세르산)의 농도가 증가할수록 헤모글로빈에서 산소가 해리되는 정도는 증가한다.



두 종류의 DPG 농도에 대한 헤모글로빈의 산소해리곡선

<문제 4> 인간이 해발 4,500m인 높은 산에 오르면 외부 공기의 압력이 줄어들어 폐의 산소분압은 55mmHg로 감소한다. 이는 높은 고도에서 저산소증을 유발하는 원인이 된다. 고산지대에서의 낮은 산소분압에 적응하기 위한 반응 중의 하나는 DPG라는 대사산물의 농도를 4mM에서 8mM로 증가시키는 것이다. 위의 그림을 보고 각각의 DPG농도에 따른 해수면과 해발 4,500m에서 혈액 100ml당 조직에 공급되는 산소의 양을 각각 구하고 해발 4,500m에서 DPG가 8mM로 증가하는 이유를 설명하시오. (단, 혈액 100ml당 헤모글로빈의 양은 15g, 헤모글로빈 1g이 산소와 100% 결합했을 때 산소의 양은 1.5ml로 가정)

<문제 5> 해발 고도가 높은 지역에서 산소 분압이 낮을 때 이에 적응하기 위하여 인체에 나타나는 반응들을 제시문에 근거하여 추론하시오.