■ 문항별 해설 및 예시 답안

□ 문제 1 해설

유전자의 발현과정은 가장 기본적인 생명현상의 하나로서 유전, 생식과 발생, 혈액 및 순환 등 다양한 인체 생리적 조절을 정확히 이해하기 위해서 매우 필수적이다. 유전자에서 전사, 번역 과정을 거쳐 단백질을 합성하는 과정을 ‘central dogma’라고 하며 살아있는 모든 세포가 기능을 하기위해 반드시 거치는 과정이다. 인간의 많은 질병은 유전자 발현 과정이 비정상적으로 일어나거나 유전자의 돌연변이에 의해 비정상적 단백질이 생성됨으로써 야기된다. 혈액과 순환은 일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 과학적 주제이다. 따라서 생명 현상의 각 주제를 통합적으로 이해하고 종합하여 사고할 수 있는 능력을 평가하기 위한 문제 유형의 하나로 혈액과 산소운반의 문제를 유전자 발현과 접목하여 통합적으로 사고 할 수 있는 능력을 평가하고, 수혈과 골수 이식이라는 치료 방법을 빈혈과 어떻게 연관시켜 자신의 생각을 논리적으로 전개할 수 있는지 판단하기 위한 의도로 문제를 출제하였다.

[문제 1-i]은 헤모글로빈 β사슬 유전자의 돌연변이가 헤모글로빈의 구조에 어떻게 영향을 미치며, 이 과정에서 아미노산의 치환이 어떻게 단백질의 구조와 적혈구의 구조에 변화를 야기하며, 최종적으로 빈혈을 초래하는지 유전자-단백질-세포-생리적 변화의 순서로 체계적이고 과학적으로 분석하고 기술하는 능력을 보기 위한 질문이다.

[문제 1-ii]는 사람의 혈액 구성 성분 중에 비정상적인 요인이 있을 때 수혈과 골수 이식이라는 일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 매우 보편적인 치료 방법을 통해서 그 결과를 적절하게 예상하고 그러한 결론에 대한 과학적이고 논리적인 근거를 제공할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

■ 예시 답안

(1–i) 사람이 빈혈을 경험하게 되는 요인은 여러 가지가 있을 수 있으나 <제시문 1-2>를 근거로 하였을 때 헤모글로빈 β사슬의 돌연변이로 인한 겸상적혈구 빈혈증에 의한 어지럼증으로 추측할 수 있다. 인간의 염색체는 한 쌍을 가지고 있어서 두 개의 유전자에 모두 돌연변이가 일어난 경우와 하나의 유전자에만 돌연변이가 일어난 경우 그 결과가 달라지는 경우가 대부분이다.

문제에서 등산가는 평지에서는 아무런 증상을 느끼지 못하다가 높은 고도에서 빈혈 증상을 보였으므로 한 쌍의 헤모글로빈 β사슬 유전자 중 하나의 유전자에서만 6번째 아미노산이 글루탐산에서 발린으로 치환이 일어났을 것이다(제시문 1-2). 글루탐산은 산성 아미노산이고 발린은 소수성 아미노산이므로 헤모글로빈 β사슬이 서로 다른 성질을 가지는 아미노산으로 치환됨으로써 헤모글로빈의 구조가 변하게 된다(제시문 1-3). 이 때 헤모글로빈의 구조는 산소 분압이 높은 평지에서는 거의 정상 구조를 이루다가 산소 분압이 낮은 높은 산에서는 비정상적인 구조를 가진다. 이로 인해 비정상적 구조를 가지는 헤모글로빈을 포함하고 있는 적혈구는 낫 모양으로 변하고 이를 겸상적혈구

라 한다. 적혈구는 가는 모세혈관을 겨우 빠져 나갈 수 있는 크기이므로 낫 모양으로 변한 겸상적혈구는 그 구조 때문에 모세혈관을 잘 통과하지 못하고 쉽게 파괴된다(제시문 1-1). 그 결과 산소 운반에 필요한 적혈구의 수가 줄어서 원활하게 산소 공급을 하지 못해 어지럼증을 경험하게 된다. 평지에서는 증상이 없다가 높은 산에서 증상이 나타나는 이유는 헤모글로빈 β사슬 글루탐산-발린 돌연변이 단백질은 산소가 결합하지 않은 상태에서 쉽게 구조가 변하므로 산소 분압이 높은 평지에서는 증상이 나타나지 않다가 산소 분압이 낮은 높은 산에서는 헤모글로빈 구조가 쉽게 변하고 그 결과 겸상적혈구 형성 빈도가 높아지기 때문이다.

(1–ii) 혈액의 수혈은 일시적으로 혈액의 구성 성분을 보충해 주는 것이며, 골수이식은 골수 안에 혈구 세포를 생성하는 줄기세포가 포함되어 있어서 근본적으로 혈구 세포 생성을 바꾸어 줄 수 있다. 혈액의 어느 구성 성분에 문제가 생겼을 때 골수 이식은 근본적으로 모든 문제를 해결할 수 있다. 예를 들면 백혈병과 같이 백혈구 생성에 문제가 생겼을 때 골수 이식을 통해서 정상적인 백혈구를 지속적으로 생산하게 할 수 있다. 적혈구에 생기는 문제도 마찬가지로 해결이 가능하므로 골수 이식은 혈액에 생기는 모든 문제를 해결할 수 있는 좋은 치료 방법이다. 혈액을 수혈하는 경우를 고려해 보면 수혈한 혈액에 포함되어 있는 적혈구의 평균 수명은 120일이다. 그 기간이 지나서 파괴되기 이전까지는 수혈 받은 적혈구는 산소를 운반하는 자신의 기능을 충분히 수행할 수 있다. 따라서 이 문제에서 제시한 등산가가 정상인의 혈액을 충분히 수혈 받은 후 120일 이내에 등반을 시도한다면 어지럼증이 상당 부분 완화될 수 있다. 이론적으로는 골수 이식이 좀 더 완전한 치료 방법이나 적절한 공여자를 구하기 어렵다는 점을 감안하면 혈액의 수혈은 그 치료 효과 면에서는 효율이 낮을 수 있으나 쉽게 치료를 받을 수 있다는 측면에서 장점도 있다.

□ 문제 2 해설

산화/환원 반응의 균형 방정식을 해결하는 문제이다. 화학에서 많이 활용되는 산화/환원 반응을 이해하고, 이들의 균형 방정식이 산/염기 조건 하에서 서로 다르게 표현됨을 평가하고자 하는 문제이다. 간단한 수학적 사고와, 원자와 전자의 총량은 보존된다는 법칙을 활용하여 균형 방정식을 적절히 표현할 수 있는지 평가하고자 하였다. 또한 이들 산화/환원 균형 방정식을 활용하여 미지의 시료에 포함된 분석물을 적정 과정을 통하여 정확히 계산할 수 있는지 평가하고자 하였다.

■ 예시 답안

(2–i) $5Fe^{2+} + MnO_4^- + 8H^+ \text{-->} 5Fe^{3+} + Mn^{2+} + 4H_2O$

또는

$5Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) \text{-->} 5Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(aq) + 4H_2O(l)$

(2–ii) $5Fe^{2+} + MnO_4^- + 4H_2O \text{-->} 5Fe^{3+} + Mn^{2+} + 8OH^-$

또는

$$5Fe^{2+}(aq)\ +\ MnO_4^-(aq)\ +\ 4H_2O(l)\ \text{-->}\ 5Fe^{3+}(aq)\ +\ Mn^{2+}(aq)\ +\ 8OH^-(aq)$$

(2–iii) **정답:** 40 mL (풀이과정은 아래에 기술되어 있음)

$$\underline{?}\ \text{mol Fe}^{2+} = 40.0\ \text{mL} \times \frac{0.100\ \text{mol Fe}^{2+}}{1000\ \text{mL}} = 4.00 \times 10^{-3}\ \text{mol Fe}^{2+}$$

$$\underline{?}\ \text{mol MnO}_4^- = 4.00 \times 10^{-3}\ \text{mol Fe}^{2+} \times \frac{1\ \text{mol MnO}_4^-}{5\ \text{mol Fe}^{2+}} = 8.00 \times 10^{-4}\ \text{mol MnO}_4^-$$

$$\text{필 요한 부피 (KMnO}_4\text{, mL)} = \frac{8.00 \times 10^{-4}\ \text{mol}}{0.0200\ \text{M}} = 4 \times 10^{-2}\ \text{L} = 40\ \text{mL}$$

□ 문제 3 해설

적분은 미분과 함께 미적분학에 있어서 가장 중심이 되는 작용소이다. 미적분학은 자연과학, 공학 등 여러 학문 분야에서 필수 불가결한 언어로 쓰이고 있을 뿐 아니라, 자연과학과 공학을 공부하고자 하는 학생들의 학문 발전의 밑거름이 되는 분야이다. 이러한 배경 아래에서 수학 문제를 출제함에 있어서 고교교육 과정을 넘어서는 독창적인 답안을 유도하거나 기술적인 계산을 요구하는 문제를 지양하고, 이공계 고교 수학 교육 과정을 정상적으로 이수한 학생이면 논리 전개가 가능한 문제를 출제하고자 하였다. 또한 고교 교육과정에서 배운 적분에 대한 직관적인 이해의 중요성을 강조하고자 하였다.

[문제 3-i]은 고교 교육 과정에서 중요한 개념 중의 하나인 역함수를 찾아내어 그 역함수를 이용하여 주어진 부등식을 유도하는 능력을 판단하고자 하였다. 처음부터 주어진 함수를 적분하는 것이 아니라 결과를 유도하기 위하여 적당한 함수를 찾아내는 능력을 보고자 하였다. 또한 실제로 간단한 경우의 함수의 적분을 직접 계산할 수 있는 능력의 중요성을 강조하고자 하였다.

[문제 3-ii]는 <제시문 3-2>에 나오는 <그림 1>을 기하학적으로 세밀히 관찰할 수 있는 능력을 판단하고자 하였다. 여러 가지 형태의 그래프를 학생들이 실제로 그려봄으로써 등호가 성립하는 경우를 추론할 수 있는 능력을 강조하고자 하였다.

■ 예시 답안

(3–i) $\frac{a^p}{p}$라는 항을 만들기 위해서는 x^{p-1}을 적분하여야 한다. $p>1$인 경우 $f(x)=x^{p-1}$은 구간 $[0,\infty)$에서 $[0,\infty)$로 가는 일대일대응이 된다. x와 y를 바꾸는 과정, 즉, $y=x$에 관하여 대칭이동을 함으로써 역함수를 구할 수 있다. 주어진 함수의

역함수는 $x=y^{p-1}$, 즉, $y=x^{\frac{1}{p-1}}(x \ge 0)$ 가 된다.

<제시문 3-2>에 주어진 식 (1) $ab \le \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$ 을 적용하고자 한다. $f(x)=x^{p-1}$, $f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{p-1}}$ 라 두면, $\int_0^a x^{p-1}dx = \left[\frac{1}{p}x^p\right]_{x=0}^a = \frac{a^p}{p}$ 가 되고, $\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy = \left[\frac{p-1}{p}y^{\frac{p}{p-1}}\right]_{y=0}^b = \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}$ 가 성립한다. 문제에서 q 는 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 을 만족하므로, $q=\frac{p}{p-1}$ 이고 따라서, $\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} = \frac{b^q}{q}$ 가 성립한다.

그러므로, 이 경우 식 (1)의 우변은 $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ 가 되고 따라서, $ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ 가 성립한다.

(3–ii) 직사각형의 넓이와 적분 영역의 넓이가 같아지려면 <그림 1>로부터 등식이 성립할 때, $f(a)$와 b가 같아야 함을 알 수 있다. 즉, 식 (1)의 등호가 성립할 조건은 $b=f(a)$이다. 마찬가지로, [문제 3-i]에 주어진 부등식의 등호가 성립할 조건은 $b=a^{p-1}$, 즉 $b^q=a^p$이다.

□ 문제 4 해설

물리를 학습하는 주된 이유 중의 하나는 복잡한 현상들을 모델화를 통해 체계적으로 이해하는데 있다. 물리를 학습하는 학생들에게는 연구수준에 해당하는 복잡한 실제 시스템들도 고등학교 교과과정에서 배우는 간단한 일반물리 내용으로도 이해할 수 있음을 알려줌으로써 간단한 물리 지식으로도 다양한 현실적인 문제들을 해결할 수 있음을 알려주는데 목적이 있다. <제시문 4-1>은 물리시스템들 중에 퍼텐셜 에너지가 위치의 함수로 잘 정의가 되지 않는 경우에도 국소적으로는 퍼텐셜 에너지가 조화진동과 유사하기 때문에 조화진동 근사를 사용할 수 있음을 기술하고 있다.

[문제 4-i] 위치에 따른 퍼텐셜 에너지가 복잡한 일반적인 용수철 시스템들 중 하나로서 아래와 같은 퍼텐셜 에너지를 가정할 경우에도,

$$U = k_1x^2 + k_2x^4 + k_3x^6 + k_4x^8 + ...$$

$x=0$ 근처에서의 운동은 고등학교 물리에서 배운 용수철의 퍼텐셜 에너지인 $U=\frac{1}{2}kx^2$에서의 운동과 유사하게 기술될 수 있음을 알려주고자 하였다.

[문제 4-ii] 일상생활에서 접할 수 있는 단진자의 조화운동에 대한 일반적인 해를 구하는 것은 어려움이 있다. 하지만, 시계추와 같이 $\theta=0$인 부근에서만 움직이는 단진자 경우 고등

학교 물리에서 배운 용수철의 힘인 $F=-kx$와 유사하게 기술될 수 있음을 보여주고자 하였다. 또한, 실제 시스템들에 대해서 고등학교에서 배운 물리 지식으로도 적절한 근사를 통해서 일부분 이해가 될 수 있음을 알려주고자 하였다.

■ 예시 답안

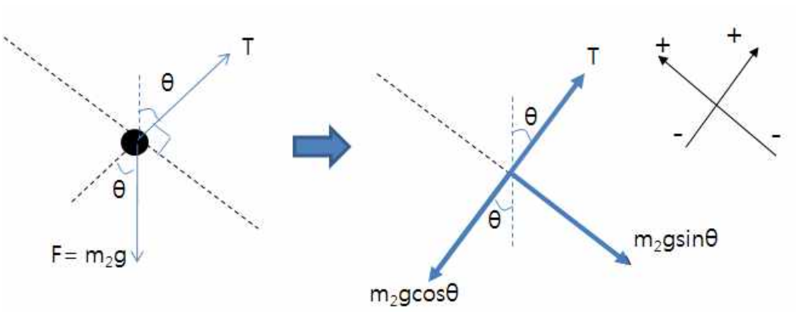
(4-i) <제시문 4-2>에서의 퍼텐셜 에너지인

$U=k_1x^2+k_2x^4+k_3x^6+k_4x^8+\ldots\ldots$는 $x\approx 0$ 인 경우

$U\approx k_1x^2$로 근사할 수 있다. 이 경우, $F=-\dfrac{dU}{dt}=-2k_1x$이다.

또한, $F=m_1\dfrac{d^2x}{dt^2}=-2k_1x$이다. $C_1\dfrac{d^2x}{dt^2}=-C_2x$의 경우 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}$이므로, 이 문제에서 진동수는 근사적으로 $f\approx\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k_1}{m_1}}$이다.

(4-ii) <제시문 4-3>에서와 같은 단진자의 경우 물체에 작용하는 힘들을 아래의 그림과 같이 바꿀 수 있다.



이 경우 물체의 진행방향으로의 힘은 $F=-m_2g\sin\theta$이고 진행과 수직되는 방향은 평행을 유지하고 있으므로 $T=m_2g\cos\theta$이다. θ가 매우 작을 경우 $\sin\theta\approx\theta$이므로 근사적으로 $F\approx-m_2g\theta$이다.

또한, $dx\approx Rd\theta$이므로 $F=m_2\dfrac{d^2x}{dt^2}$는 근사적으로 $m_2R\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\approx-m_2g\theta$가 된다. 양변을 정리하면 $R\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\approx-g\theta$가 된다. $C_1\dfrac{d^2x}{dt^2}=-C_2x$의 경우 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}$이므로, 이 문제에서의 진동수는 근사적으로 $f\approx\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{R}}$가 된다.