

2. 자연계 모의논술

■ 문제

1. 다음 <제시문 1-1>에서 <제시문 1-3>을 읽고 [문제 1-i]과 [문제 1-iii]에 답하시오.

<제시문 1-1> 사람의 혈액을 원심분리하면 맑은 액체 성분인 혈장과 고형 성분인 혈구로 나누어진다. 혈구는 적혈구, 백혈구, 혈소판으로 구성되며, 적혈구는 핵이 없는 세포로 지름이 약 $8\mu\text{m}$ 이며, 산소를 운반하는 붉은색의 헤모글로빈(Hb)이 들어있다. 모세혈관의 지름은 $8\text{--}20\mu\text{m}$ 으로 매우 가는 것은 적혈구 1개가 겨우 통과할 정도이다.

<제시문 1-2> 유전자를 구성하는 DNA 염기서열은 여러 가지 요인에 의해 1개 이상의 염기가 다른 염기로 바뀌는 경우가 있다. 정상 헤모글로빈 β 사슬의 6번째 아미노산은 글루탐산(Glu)인데 이것이 발린(Val)으로 치환되면 겸상 적혈구가 나타나게 된다.

<제시문 1-3> 단백질은 고유한 3차원 구조로 접히는(Folding) 폴리펩티드 사슬을 말한다. 단백질이 자연 상태에서 접히는 구조는 단백질의 이 폴리펩티드를 이루는 아미노산들의 서열(sequence)에 의해 결정된다. 생화학자들은 단백질의 구조를 4개의 단계로 나누어 설명한다. 특정 폴리펩티드의 아미노산이 다른 아미노산으로 치환되면 바뀐 아미노산이 가지는 곁사슬(side chain 또는 R-그룹)의 성질에 따라서 단백질의 구조에 영향을 주기도 한다.

[문제 1-i] 어느 등산가는 평지에서는 아무런 증상을 느끼지 못하다가 에베레스트 산을 등반하는 도중 극심한 어지럼증을 느꼈다. 이 때 등산가의 체내에서 일어나고 있는 변화를 유전자상의 돌연변이, 단백질의 구조, 적혈구의 구조, 어지럼증을 느끼는 생리적 이유, 평지에서는 증상이 없다가 높은 고도에서 증상이 나타나는 이유 등의 내용이 포함되도록 <제시문 1-1, 1-2, 1-3>을 참고하여 설명하시오.

[문제 1-ii] 위의 문제에서 언급한 등산가가 에베레스트 등반을 하기 위해서 정상 사람의 혈액을 수혈 받는 방법과 정상 사람으로부터 골수를 이식 받는 방법을 고려한다고 가정하면 각 방법을 통해 치료를 받았을 때 이 등산가가 무사히 등반을 마칠 수 있을지 자신의 생각을 논리적으로 설명하시오.

2. 다음 <제시문 2-1>에서 <제시문 2-3>을 읽고 [문제 2-i]에서 [문제 2-iii]까지 답하시오.

<제시문 2-1> 산화 반응은 산화수가 증가하는 반응이다. 환원 반응은 산화수가 감소하는 반

응이다. 두 반응은 반드시 함께 발생한다.

<제시문 2-2> 산화수의 총 증가량은 산화수의 총 감소량과 같아야만 한다. 계수가 맞추어진 모든 화학 방정식은 다음 두 가지 기준은 만족하여야만 한다. 첫째, 질량 균형이 잡혀야 한다. 즉 반응물과 생성물의 원자 수가 같아야 한다. 둘째, 전하 균형이 잡혀야 한다. 즉 방정식의 좌변과 우변의 실제 전하의 총합은 서로 같다. 균형 화학식 단위 방정식에서는 각 변의 총 전하가 영이 되어야 한다. 균형 알짜 이온 단위 방정식에서는 각 변의 총 전하가 영이 아닐 수도 있지만, 총 전하는 반드시 방정식 양변에서 같아야만 한다.

<제시문 2-3> 산화/환원 반응에서 균형 방정식을 만들 때, 산성 용액에서는 H^+ 또는 H_2O 만 첨가될 수 있다. 염기성 용액에서, OH^- 또는 H_2O 만 첨가될 수 있다.

[문제 2-i] 위의 <제시문 2-1, 2-2, 2-3> 모두를 참고하여 답하시오.

황산 용액 내에서 MnO_4^- 이온은 Fe^{2+} 이온을 Fe^{3+} 이온으로 산화시킨다. MnO_4^- 이온 자신은 Mn^{2+} 이온으로 환원된다. 이 반응에 대한 균형 알짜 이온 반응식을 제시하시오.

[문제 2-ii] 위 반응이 염기 조건에서도 발생한다고 가정했을 때, 이 반응에 대한 균형 알짜 이온 반응식을 제시하시오.

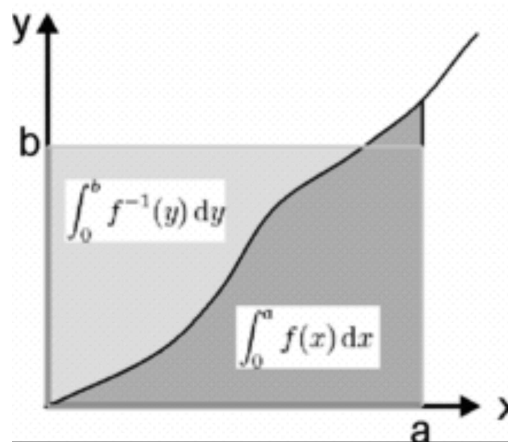
[문제 2-iii] 0.100 M $FeSO_4$ 용액 40.0 mL를 산화시키는데 필요한 0.0200 M $KMnO_4$ 용액의 부피는 몇 mL 인가? (이 반응은 산 용액 조건에서 발생한다고 가정하시오.)

3. 다음 <제시문 3-1>에서 <제시문 3-2>를 읽고 [문제 3-i]과 [문제 3-ii]에 답하시오.

<제시문 3-1> 폐구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 구간위의 정적분 $\int_a^b f(x) dx$ 는 좌표평면에서 $y = f(x)$ 와 x 축, $x = a$ 와 $x = b$ 로 둘러싸인 영역의 부호를 가진 넓이로 해석될 수 있다.

<제시문 3-2> 함수 $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 가 <그림 1>과 같이 $x \geq 0$ 에서 연속이고 증가하는 일대일 대응이라고 하자. 만약, $f(0) = 0$ 이고 $x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 역함수 $x = f^{-1}(y)$ 가 모든 $y \geq 0$ 에 대하여 존재한다면, <그림 1>과 <제시문 3-1>로부터 모든 양수 a, b 에 대하여 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \dots \dots \dots (1)$$



<그림 1>

[문제 3-i] p 가 1보다 큰 양수이고, q 가 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 을 만족하는 양수일 때, <제시문 3-2>의 식 (1)을 이용하여 모든 양수 a, b 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 논증하시오.

(필요한 경우, $k \neq -1$ 인 실수일 때, $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$ 임을 이용하시오.)

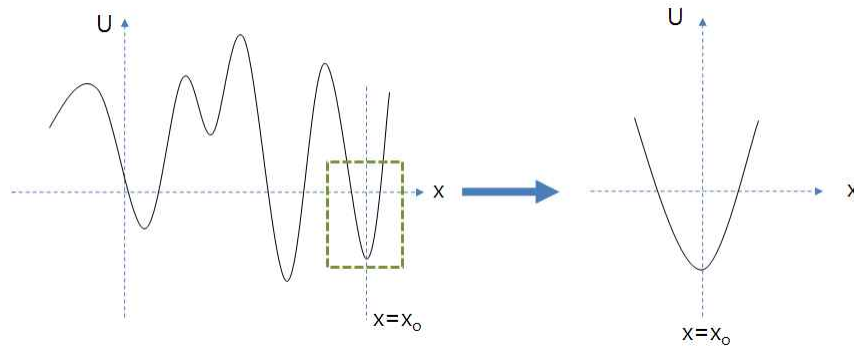
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

[문제 3-ii] <제시문 3-2>의 식 (1)에서 등호가 성립할 때, a 와 b 의 관계를 <그림 1>로부터 유추하고 또한 이로부터 [문제 3-i]의 부등식에서 등호가 성립할 조건, 즉, $ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ 가 성립할 조건을 추론하시오.

4. 다음 <제시문 4-1>에서 <제시문 4-3>을 읽고 [문제 4-i]과 [문제 4-ii]에 답하시오.

<제시문 4-1> 아래 <그림 2>에 기술되어 있는 바와 같이 물리 시스템에서 위치(x)에 따른 퍼텐셜에너지(U)가 복잡한 경우에 국소적으로 $U \approx \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - U_0$ 와 같은 에너지를 가진

다는 것을 착안하여 국소적으로 조화진동 근사(harmonic oscillator approximation)라는 것을 사용하는 경우가 있다.



<그림 2>

<제시문 4-2> 아래 <그림 3>에서와 같이 바닥과의 마찰력이 없는 질량 m_1 을 가진 용수철 시스템을 가정해보자. 위치에 따른 용수철의 퍼텐셜 에너지(U)가 일반적인 형태들 중 하나인 수식 (2)와 같다고 하자.

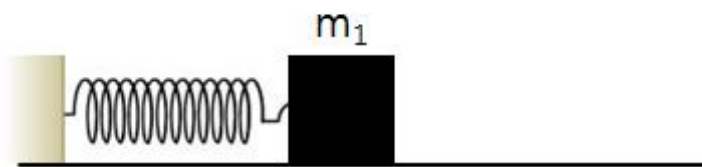
$$U = k_1x^2 + k_2x^4 + k_3x^6 + k_4x^8 + \dots \quad \text{-----(2)}$$

여기서, k_n (n 은 정수)은 상수이다.

힘(F)과 퍼텐셜 에너지의 상관관계는 $F = -\frac{dU}{dx}$ 이고, 힘과 위치와의 상관관계는

$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$ 이다. $C_1\frac{d^2x}{dt^2} = -C_2x$ 의 이차 미분 방정식의 경우 가능한 해들 중에 하나는

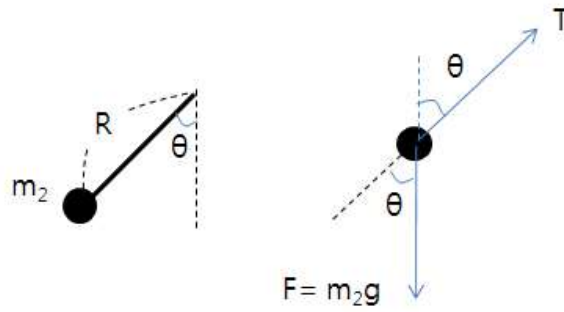
$x = A \sin(2\pi ft)$ 이고, 진동수 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ 이다. A 는 상수이다.



<그림 3>

<제시문 4-3> 아래 <그림 4>에서와 같이 중력 하에서 질량이 m_2 이고, 길이가 R 인 단진자 운동을 가정하자. T 는 줄이 m_2 에 작용하는 장력이고, $F = m_2g$ 는 중력이 물체에 작용하는 힘이다. 여기서, 줄의 무게는 무시하자.

θ 가 0에 가까울 경우 근사적으로 $\sin\theta \approx \theta$ 이고, 반지름이 R 인 원을 따라 움직이는 미소거리(dx)는 근사적으로 $dx \approx Rd\theta$ 이다.



<그림 4>

[문제 4-i] <제시문 4-2>에서 물체의 운동이 $x = 0$ 에 매우 가까운 곳에서만 일어난다고 가정할 경우에 용수철의 조화진동의 진동수가 근사적으로 $f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k_1}{m_1}}$ 임을 증명하시오.

[문제 4-ii] <제시문 4-3>에서 물체의 운동이 지면에서 가장 가까운 $\theta = 0$ 근처에서만 일어난다고 가정할 경우, 단진자의 조화진동의 진동수가 근사적으로 $f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}}$ 임을 증명하시오. 진동수 계산 시 <제시문 4-2>에서의 수식들 중 일부를 사용하여도 된다.