

논술고사 해설지 (자연계열)

출제위원장				(인)
출제위원	(인)	출제위원		(인)
출제위원	(인)	출제위원		(인)



[문제 1] (총 100점)

함수

$$f(x) = x^4 + (6a + 2)x^3 + (11a^2 + 10a + 1)x^2 + (6a^3 + 14a^2 + 4a)x + 3a^3 + 5a^2 + a$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, a 는 상수이다.)

- (a) $f(x) = (x^2 + Ax + 3a^2 + 5a + 1)(x^2 + Bx + a)$ 를 만족시키는 A, B 를 a 를 사용하여 나타내어라. (20점)
- (b) 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 m_a 라 할 때 집합 $\{a | m_a \geq 0\}$ 을 구하여라. (80점)

[예시답안]

(a) 항등식

$$(x^2 + Ax + 3a^2 + 5a + 1)(x^2 + Bx + a) = x^4 + (6a + 2)x^3 + (11a^2 + 10a + 1)x^2 + (6a^3 + 14a^2 + 4a)x + 3a^3 + 5a^2 + a$$

에서 이차항의 계수를 비교하면 $a + AB + 3a^2 + 5a + 1 = 11a^2 + 10a + 1$ 이므로

$$AB = (11a^2 + 10a + 1) - a - (3a^2 + 5a + 1) = 8a^2 + 4a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 삼차항의 계수를 비교하면

$$A + B = 6a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이다. 따라서 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에 의해 $B(6a + 2) = BA + B^2 = 8a^2 + 4a + B^2$ 이다. 즉,

$$B^2 - (6a + 2)B + 8a^2 + 4a = 0$$

이므로 $B = 2a$ 또는 $B = 4a + 2$ 이다. $\textcircled{2}$ 에 의해 $A = 2a$, $B = 4a + 2$ 이거나 $A = 4a + 2$, $B = 2a$ 인데, $A = 4a + 2$ 이고 $B = 2a$ 인 경우에만 주어진 등식을 만족시킨다. 그러므로

$$A = 4a + 2, B = 2a$$

이다.

(b) (a)에 의해 $f(x) = (x^2 + (4a + 2)x + 3a^2 + 5a + 1)(x^2 + 2ax + a)$ 이므로

$$p(x) = x^2 + (4a + 2)x + 3a^2 + 5a + 1, \quad q(x) = x^2 + 2ax + a$$

라 하자.

$m_a \geq 0$ 이면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이므로, 모든 실수 x 에 대하여 $p(x)$ 와 $q(x)$ 의 부호는 서로 같아야만

한다. 이제 두 이차방정식 $p(x) = 0$, $q(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면 $\frac{D_1}{4} = \frac{D_2}{4} = a^2 - a$ 이다.

(i) $a^2 - a \leq 0$ 인 경우

모든 실수 x 에 대하여 $p(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$ 이다. 따라서 $0 \leq a \leq 1$ 이다.

(ii) $a^2 - a > 0$ 인 경우

두 방정식 $p(x) = 0$, $q(x) = 0$ 이 각각 서로 다른 두 실근을 가지므로, 두 부등식 $p(x) \leq 0$, $q(x) \leq 0$ 을 만족시키는 해의 범위가 같을 때에만 $f(x) = p(x)q(x) \geq 0$ 이다. 그런데 $p(x)$ 와 $q(x)$ 의 이차항의 계수가 모두 1이므로 $p(x) = q(x)$, 즉 $4a + 2 = 2a$ 와 $3a^2 + 5a + 1 = a$ 이다. 따라서 $a = -1$ 이다.

그러므로 (i)과 (ii)에 의해 $\{a | m_a \geq 0\} = \{a | a = -1 \text{ 또는 } 0 \leq a \leq 1\}$ 이다.

[문제 2] (100점)

3개의 당첨 제비를 포함하여 $2n$ 개의 제비가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 A, B 두 사람이 A부터 시작하여 A와 B가 교대로 제비를 한 개씩 임의로 뽑는다. 당첨 제비가 처음 나오면 이 시행을 멈추기로 할 때, A가 당첨 제비를 뽑을 확률을 구하여라. (단, n 은 1보다 큰 자연수이고, 꺼낸 제비는 상자 안에 다시 넣지 않는다.)

[예시답안]

A는 최대 $n-1$ 회까지 제비를 뽑을 수 있다. 당첨 제비를 ○, 비당첨 제비를 ×로 나타내면 A가 당첨 제비를 뽑는 경우와 확률은 다음 표와 같다.

횟수	A	B	A	B	A	...	A	B	A	확률
1	○									$\frac{3}{2n}$
2	×	×	○							$\frac{2n-3}{2n} \times \frac{2n-4}{2n-1} \times \frac{3}{2n-2} = \frac{3(n-2)(2n-3)}{2n(n-1)(2n-1)}$
3	×	×	×	×	○					$\frac{2n-3}{2n} \times \frac{2n-4}{2n-1} \times \frac{2n-5}{2n-2} \times \frac{2n-6}{2n-3} \times \frac{3}{2n-4} = \frac{3(n-3)(2n-5)}{2n(n-1)(2n-1)}$
	⋮									⋮
$n-1$	×	×	×	×	×	...	×	×	○	$\frac{2n-3}{2n} \times \frac{2n-4}{2n-1} \times \dots \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2n(n-1)(2n-1)}$

A가 $k(1 \leq k \leq n-1)$ 번 만에 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{3(n-k)(2n-2k+1)}{2n(n-1)(2n-1)}$$

이다. 따라서 A가 당첨제비를 뽑을 확률 p 는

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{3(n-k)(2n-2k+1)}{2n(n-1)(2n-1)} \right\} \\ &= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \{2k^2 - (4n+1)k + n(2n+1)\} \\ &= \frac{4n+1}{4(2n-1)} \end{aligned}$$

이다.

[문제 3] (100점)

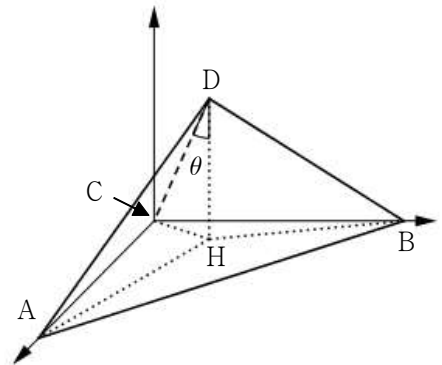
사면체 ABCD가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

- (1) $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$
 (2) $\overline{AD} = \overline{BD} = 5, \overline{CD} = 4$

평면 ABC의 법선벡터와 벡터 \overrightarrow{CD} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ 라 할 때, $\cos^2\theta$ 를 a, b 를 사용하여 나타내어라.

[예시답안]

그림과 같이 사면체 ABCD를 점 C가 원점, 반직선 CA가 x 축의 양의 방향, 반직선 CB가 y 축의 양의 방향이 되도록 공간좌표에 놓고, 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 $H(x, y, 0)$ 이라고 하자. 이때 $A(b, 0, 0)$ 이고 $B(0, a, 0)$ 이다.



직각삼각형 CDH에서 $\angle CDH = \theta$ 이므로 $\overline{CH} = 4\sin\theta$ 이고

$\overline{DH} = 4\cos\theta$ 이다. 한편 $\overline{CH}^2 = x^2 + y^2$ 이므로

$$x^2 + y^2 = 16\sin^2\theta \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이다. $\overline{AH}^2 = (x-b)^2 + y^2$, $\angle DHA$ 가 직각이므로

$$(x-b)^2 + y^2 = 25 - 16\cos^2\theta \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이다. $\overline{BH}^2 = x^2 + (y-a)^2$ 이고 $\angle DHB$ 가 직각이므로

$$x^2 + (y-a)^2 = 25 - 16\cos^2\theta \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이다.

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $x = \frac{b^2-9}{2b}$ 이고, ㉠과 ㉢을 연립하여 풀면 $y = \frac{a^2-9}{2a}$ 이다.

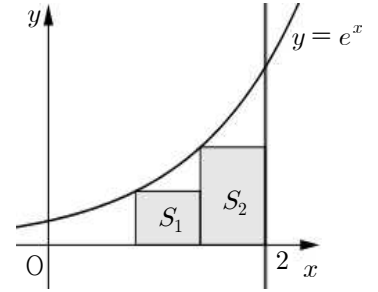
따라서 점 D의 좌표는 $D\left(\frac{b^2-9}{2b}, \frac{a^2-9}{2a}, 4\cos\theta\right)$ 이고, $\overline{CD}^2 = 16$ 이므로

$$\left(\frac{b^2-9}{2b}\right)^2 + \left(\frac{a^2-9}{2a}\right)^2 + 16\cos^2\theta = 16$$

이다. 그러므로 $\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{a^2-9}{8a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-9}{8b}\right)^2$ 이다.

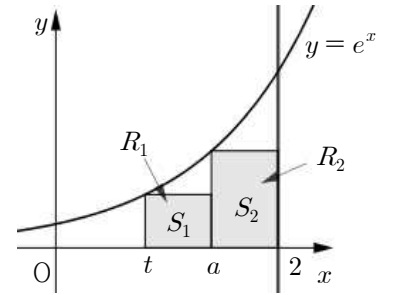
[문제 4] (100점)

그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 과 x 축 및 두 직선 $x=0, x=2$ 로 둘러싸인 영역에 한 변이 x 축에 있고 내부가 서로 겹치지 않는 두 직사각형이 있다. 두 직사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, S_1+S_2 의 최댓값을 구하여라.



[예시답안]

그림과 같이 두 직사각형 R_1, R_2 가 한 변에서 맞닿아 있고, 직사각형 R_2 의 오른쪽 변이 직선 $x=2$ 에 있으며, 각 직사각형의 한 꼭짓점이 곡선 $y=e^x$ 에 있을 때 두 직사각형 넓이의 합이 최대가 될 수 있다.



$0 < a < 2$ 인 실수 a 에 대하여 두 직사각형이 직선 $x=a$ 에서 맞닿아 있다고 가정하자. R_1 의 왼쪽 변이 놓인 직선의 x 좌표를 $t(0 \leq t < a)$ 라 하면 $S_1 = (a-t)e^t$ 이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = (a-x)e^x$ 이라 하자. 그러면 $f'(x) = (-1+a-x)e^x$ 이고 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = a-1$ 이다.

x	...	$a-1$...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	최대	↘

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(a-1) = e^{a-1}$ 이므로 $S_1 \leq e^{a-1}$ 이다. 한편 $S_2 = (2-a)e^a$ 이므로

$$S_1 + S_2 \leq e^{a-1} + (2-a)e^a = e^a \left(2 + \frac{1}{e} - a \right)$$

이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = e^x \left(2 + \frac{1}{e} - x \right)$ 라 하자. 그러면 $g'(x) = e^x \left(1 + \frac{1}{e} - x \right)$ 이고 $g'(x) = 0$ 의 해는 $x = 1 + \frac{1}{e}$ 이다.

x	...	$1 + \frac{1}{e}$...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	최대	↘

따라서 $g(x)$ 의 최댓값은 $g\left(1 + \frac{1}{e}\right) = e^{1 + \frac{1}{e}}$ 이므로

$$S_1 + S_2 \leq e^{1 + \frac{1}{e}}$$

이다. 한편 R_1 의 왼쪽 변이 직선 $x = \frac{1}{e}$ 에 있고, R_2 의 왼쪽 변이 직선 $x = 1 + \frac{1}{e}$ ($0 < 1 + \frac{1}{e} < 2$)에 있을 때,

$$S_1 + S_2 = \left(1 + \frac{1}{e} - 1\right)e^{\frac{1}{e}} + \left\{2 - \left(1 + \frac{1}{e}\right)\right\}e^{1 + \frac{1}{e}} = e^{1 + \frac{1}{e}}$$

이다. 그러므로 $S_1 + S_2$ 의 최댓값은 $e^{1 + \frac{1}{e}}$ 이다.