[문제 1] (총 100점)
다음 물음에 답하여라.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$의 값을 구하여라. (30점)

(b) 함수

$$F(x)=\begin{cases} x^3-3x & (x\le 0) \\ \dfrac{4x^2}{x^2+1} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 직선 $y=a$ (a는 $0\le a\le 2$인 상수)와 함수 $y=F(x)$의 그래프의 교점의 x좌표 중 최댓값을 M_a, 최솟값을 m_a라 하자. 구간 $[0,2]$에서 정의된 함수 $f(t)=M_t-m_t$에 대하여 $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$의 값을 구하여라. (70점)

[예시답안]

(a) $x=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

이다.

(b) 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형이 그림 1과 같으므로, $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$의 값은 그림 2의 어두운 부분의 넓이와 같다. 따라서

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_{-\sqrt{3}}^{-1}(x^3-3x)dx + 2 + \int_0^1\left(2-\frac{4x^2}{x^2+1}\right)dx$$

이다. 한편

$$\int_{-\sqrt{3}}^{-1}(x^3-3x)dx = 1\text{이고} \quad \int_0^1\left(2-\frac{4x^2}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1\left(\frac{4}{x^2+1}-2\right)dx = \pi-2$$

이므로,

$$\int_0^2 f(t)dt = \pi+1$$

이다.

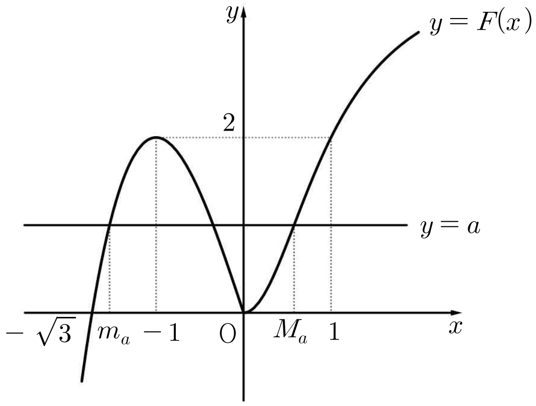


그림 1

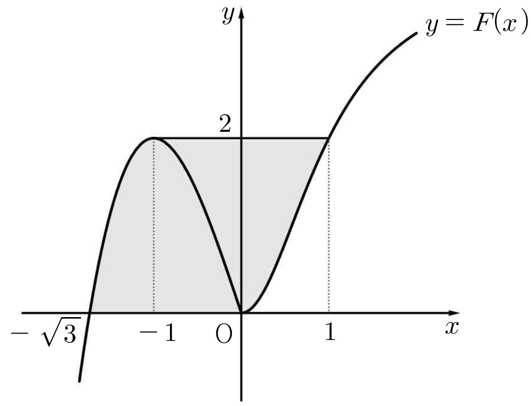


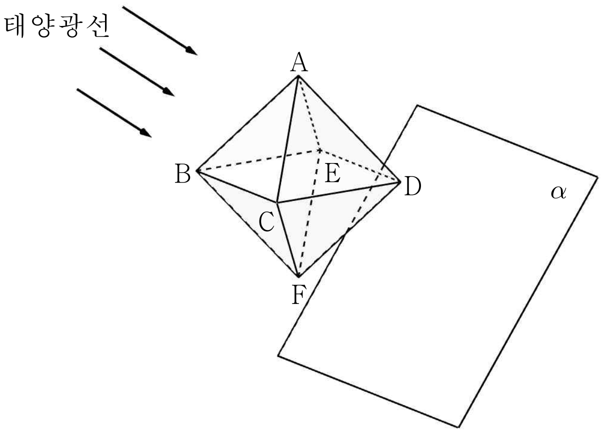
그림 2

[문제 2] (총 100점)

그림과 같은 한 모서리의 길이가 2인 정팔면체 ABCDEF에서 다음 물음에 답하여라.

(a) 두 삼각형 ABC와 EDF의 무게중심을 각각 G_1과 G_2라 할 때, 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{G_1G_2}$의 값을 구하여라. (30점)

(b) 벡터 $\overrightarrow{G_1G_2}$와 수직이고 정팔면체와 만나지 않는 한 평면을 α라 하자. 태양광선이 평면 α에 수직으로 비추어 정팔면체의 그림자가 평면 α에 생길 때, 이 그림자의 넓이를 구하여라. (70점)



[예시답안]

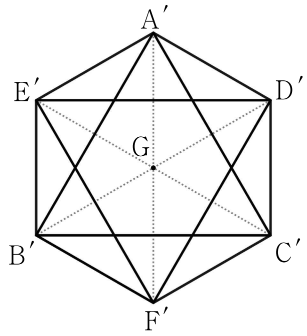
(a) 네 점 B, C, D, E가 B$(-1,\ -1,\ 0)$, C$(1,\ -1,\ 0)$, D$(1,\ 1,\ 0)$, E$(-1,\ 1,\ 0)$이 되도록 좌표축을 정하자. 이때, A$(0,\ 0,\ a)$ $(a>0)$라 하면 $\overline{AB}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+a^2}=\sqrt{a^2+2}=2$이므로 A$(0,\ 0,\ \sqrt{2})$이고, F$(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$이다. $\overrightarrow{AB}=(-1,\ -1,\ -\sqrt{2})$이고, $G_1\left(0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $G_2\left(0,\ \frac{2}{3},\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$이므로 $\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}=\left(0,\ \frac{4}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{G_1G_2}=(-1,-1,-\sqrt{2})\cdot\left(0,\frac{4}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=0$$

이다.

(b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{G_1G_2}=(1,\ -1,\ -\sqrt{2})\cdot\left(0,\ \frac{4}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=0$이므로 평면 ABC와 벡터 $\overrightarrow{G_1G_2}$는 서로 수직이다. 마찬가지로 평면 DEF도 벡터 $\overrightarrow{G_1G_2}$에 수직이다. 따라서 평면 α는 평면 ABC와 평면 DEF에 각각 평행하다. 벡터 $\overrightarrow{G_1G_2}$와 평면 α가 서로 수직이므로 두 점 G_1, G_2의 평면 α 위로의 정사영은 일치한다. 여섯 점 A, B, C, D, E, F의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′, D′, E′, F′이라 하면, 두 삼각형 A′B′C′과 E′D′F′은 한 변의 길이가 2이고 무게중심이 일치하는 정삼각형이다. 정사각형 BCDE의 정사영 B′C′D′E′은 마주보는 두 쌍의 변의 길이가 각각 같으므로 평행사변형이다. 따라서 다각형 A′E′B′F′C′D′은 정육각형이고 이것이 정팔면체의 그림자이다. 삼각형

$\mathrm{A'B'C'}$의 무게중심을 G라 하면 $\overline{\mathrm{A'B'}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{A'G}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이고, 정삼각형 $\mathrm{GA'E'}$의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다. 그러므로 구하는 그림자의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.



[문제 3] (총 100점)

주사위 100개를 동시에 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나오는 주사위의 개수가 홀수이면 a점, 홀수가 아니면 b점을 받는다고 하자. 받는 점수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하여라.

[예시답안]

주사위 100개를 동시에 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나오는 주사위의 개수가 홀수일 확률 p와 홀수가 아닐 확률 $1-p$는 다음과 같다.

$$p=\sum_{k=1}^{50} {}_{100}\mathrm{C}_{2k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{101-2k}, \qquad 1-p=\sum_{k=0}^{50} {}_{100}\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{100-2k}$$

따라서

$$(1-p)-p=\sum_{k=0}^{100}(-1)^k {}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}=\sum_{k=0}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$$

이므로 이항정리에 의해

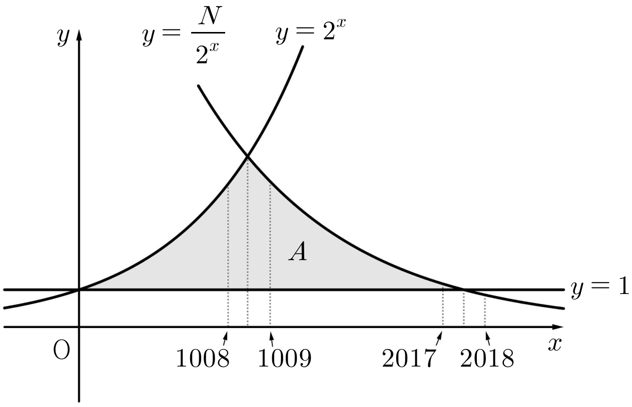
$$1-2p=\sum_{k=0}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{100}=\frac{1}{3^{100}}$$

이다. 그러므로 $p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{100}}$이고, $\mathrm{E}(X)=ap+b(1-p)=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2\cdot 3^{100}}$이다.

[문제 4] (총 100점)
자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 두 자연수 x와 y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 a_n이라 하자.
$N=2^{2018}-1$일 때, $\sum_{k=1}^{N} a_k$의 값을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{n}{2^x}$
(2) $y \le 2^x$

[예시답안]



그림과 같이 좌표평면에서 연립부등식 $y \le \dfrac{N}{2^x}$, $y \le 2^x$, $y \ge 1$의 영역을 A라 하자. $1 \le n \le N$인 자연수 n에 대하여 $y=\dfrac{n}{2^x}$과 $y \le 2^x$을 모두 만족시키는 점 (x, y) (x, y는 자연수)는 영역 A에 속하고, $m \ne n$이면 두 곡선 $y=\dfrac{m}{2^x}$, $y=\dfrac{n}{2^x}$은 만나지 않는다. 한편 영역 A에 있는 점 (p, q) (p, q는 자연수)에 대하여 $r=q2^p$라 두면 $r \le N$이고 점 (p, q)는 곡선 $y=\dfrac{r}{2^x}$에 있으며 $q \le 2^p$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{N} a_k$는 영역 A에 포함되는 점 (x, y) (x, y는 자연수)의 개수와 같으므로 그 점의 개수를 구하면 된다.

$x \ge 2018$이면 $y \le \dfrac{N}{2^x} \le \dfrac{2^{2018}-1}{2^{2018}} < 1$이므로 $y \le \dfrac{N}{2^x}$을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)가 존재하지 않는다. 또한 $\dfrac{N}{2^x}=2^x$이면 $2^{2017} < 2^{2x} = N < 2^{2018}$이므로 $1008 < x < 1009$이다. 따라서 두 곡선 $y=2^x$, $y=\dfrac{N}{2^x}$의 교점의 x좌표는 1008보다 크고 1009보다 작다. 따라서 자연수 x에 대하여

$1 \le x \le 1008$이면 $1 \le y \le 2^x$인 자연수 y의 개수는 2^x이고,

$1009 \le x \le 2017$이면 $1 \le y \le \dfrac{N}{2^x} = 2^{2018-x} - 2^{-x}$인 자연수 y의 개수는 $2^{2018-x}-1$이다.

그러므로

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{1008} 2^k + \sum_{k=1009}^{2017} (2^{2018-k}-1) = \sum_{k=1}^{1008} 2^k + \sum_{k=1}^{1009} (2^k - 1) = 3 \cdot 2^{1009} - 1013$$

이다.