2017학년도 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

<문제 1>

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	교육과정 과목명	수학I, 기하와 벡터, 미적분II
	핵심개념 및 용어	삼각형의 넓이, 타원, 최댓값
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

타원 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$에 내접하는 삼각형 ABC가 있다.

1-1) 직선 AB의 방정식이 $y=x$일 때, 삼각형ABC의 넓이의 최댓값을 구하여라. (40점)

1-2) 직선 AB의 기울기가 1 일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하여라. (60점)

3. 출제 의도

본 문제는 타원과 직선이 만나는 점을 구하고 이를 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

1-1) 직선과 타원이 만나는 점을 구하고 타원위의 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

1-2) 직선과 타원이 만나는 점을 구하고 삼각형의 넓이의 최댓값을 함수의 그래프의 개형을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면 곡선 - ① 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (가) 평면 곡선 - 1) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
문제	교육과정	[수학I] - (나) 방정식과 부등식 - ① 복소수와 이차방정식

문항 및 제시문		관련 성취기준
1-1)		③ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [수학I] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{3}$ 여러 가지 방정식 ② 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. [수학I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학I] - (나) 방정식과 부등식 - 1) 복소수와 이차방정식 수학1212/1213. 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알고, 판별식의 의미를 설명할 수 있다. [수학I] - (나) 방정식과 부등식 - 3) 여러 가지 방정식 수학1232-2. 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. [수학I] - (다) 도형의 방정식 - 1) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
문제 1-2)	교육과정	[수학I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [미적분II] - (다) 미분법 - $\boxed{2}$ 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학I] - (다) 도형의 방정식 - 1) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [미적분II] - (다) 미분법 - 2) 도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	김창동 외	㈜교학사	2014	91-99 125-128 147-153
	수학I	정상권 외	㈜금성출판사	2014	98-106 132-135 156-161
	기하와 벡터	김원경 외	㈜비상교육	2014	16-20
	기하와 벡터	김창동 외	㈜천재교육	2014	17-22
	미적분II	정상권 외	㈜금성출판사	2014	185-190
	미적분II	이준열 외	㈜천재교육	2014	145-151

5. 문항 해설

직선과 타원이 만나는 점의 좌표를 구하는 것과 넓이의 최댓값을 구하는 미분법은 수학 및 공학에서 활용되는 가장 기초적인 문제이다. 본 문항의 핵심 내용은 「수학I」의 ‘방정식과 부등식’과 ‘도형의 방정식’, 「기하와 벡터」의 ‘이차곡선’,「미적분II」의 ‘미분법’ 단원에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 직선과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있는지, 두 점 사이의

거리를 구해 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는지, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1)	직선과 타원이 만나는 점을 구할 수 있다.	20
	직선과 가장 멀리 떨어진 타원 위의 점을 찾고 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	20
1-2)	직선과 타원이 만나는 점을 구하고 함수로 표현할 수 있다.	30
	주어진 구간에서 함수의 최댓값을 구할 수 있다.	30

7. 예시 답안

1-1) 점 C와 직선 $y=x$사이의 거리를 d라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot d$이다. $y=x$와 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$를 연립하여 풀면 $(x,y)=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 또는 $(x,y)=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3},\ \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$이다. 그리고 점 C에서의 접선의 기울기가 1일 때 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 된다. 이 접선의 방정식을 구하기 위해 $y=x+k$를 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에 대입하여 정리하면 $9x^2+10kx+5k^2-20=0$이고, 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=(10k)^2-4\cdot9\cdot(5k^2-20)=0$에서 $k=\pm3$이고 점 C의 좌표는 $\left(-\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ 또는 $\left(\frac{5}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$이다. 따라서 d의 최댓값은 $\frac{3}{\sqrt{2}}$이므로 구하고자 하는 S의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다.

1-2) 점 C와 직선 $y=x+b$사이의 거리를 d라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot d$이다. $y=x+b$를 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에 대입하여 정리하면 $9x^2+10bx+5b^2-20=0$이다. 이 이차방정식의 두 근을 α, β로 놓으면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\,|\alpha-\beta|$이다. $|\alpha-\beta|$를 근과 계수와의 관계를 이용하여 계산하면

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\left(\frac{-10b}{9}\right)^2-4\left(\frac{5b^2-20}{9}\right)}=\frac{4\sqrt{5}}{9}\sqrt{9-b^2}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\,|\alpha-\beta|=\frac{4\sqrt{10}}{9}\sqrt{9-b^2}$이다. 일반성을 잃지 않고 $b\le0$라 하자. 그러면 점 C의 좌표는 $\left(-\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$일 때 S가 최대가 되고, 이때 점 C와 직선 $y=x+b$ 사이의 거리는 $\frac{3-b}{\sqrt{2}}$이다. 이를 이용하여 S를 계산하면 다음과 같다.

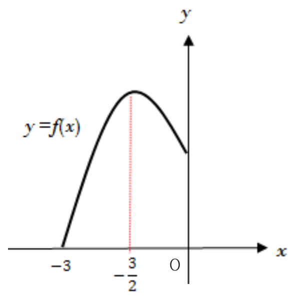
$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{9}\sqrt{9-b^2}\cdot\frac{3-b}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{9}\sqrt{(3-b)^3(3+b)}$$

구간 $(-3, 0]$에서 함수 $f(x) = (3-x)^3(3+x)$의 최댓값을 구하자.

$$f'(x) = -3(3-x)^2(3+x)+(3-x)^3 = (3-x)^2(-6-4x)$$

이므로 $f(x)$는 $x = -\frac{3}{2}$에서 극대가 되고 최대가 된다. 따라서 S의 최댓값은

$$S= \frac{2\sqrt{5}}{9}\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^3\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{9}\cdot\frac{27\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{15}$$ 이다.



<문제 2>

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	이항분포, 평균, 분산
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

확률변수 X가 이항분포$\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, 다음이 성립함을 보여라.

1-1) $\mathrm{E}(X) = np$ (50점)

1-2) $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$ (50점)

3. 출제 의도

본 문제는 확률변수 가 이항분포 를 따를 때, 평균과 분산을 n과 p를 이용해서 나타낼 수 있음을 논리적으로 보일 수 있는지를 평가하고자 한다.

1-1) 이항정리를 활용해서 평균 $\mathrm{E}(X) = np$임을 논리적으로 보일 수 있는지를 평가하는 문제이다.

1-2) 이항정리를 활용해서 분산 $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$임을 논리적으로 보일 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[확률과 통계] - 다. 통계 - 1) 확률분포 ③ 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - 다. 통계 - 1) 확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
문제 1-1)	교육과정	[확률과 통계] - 다. 통계 - 1) 확률분포 ③ 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 1) 경우의 수 ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 4) 이항정리 ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - 다. 통계 - 1) 확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
		[확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 1) 경우의 수 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 4) 이항정리 확통1141/1142. 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-2)	교육과정	[확률과 통계] - 다. 통계 - 1) 확률분포 ③ 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 1) 경우의 수 ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 4) 이항정리 ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - 다. 통계 - 1) 확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 1) 경우의 수 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - 가. 순열과 조합 - 4) 이항정리 확통1141/1142. 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	정상권 외	㈜금성출판사	2014	36-40 45-47 121-137
	확률과 통계	이준열 외	㈜천재교육	2014	29-32 70-73 134-149
	확률과 통계	황선욱 외	㈜좋은책신사고	2014	32-34 38-40 97-109

5. 문항 해설

이항분포는 통계에서 다루는 이산확률분포 중에서 가장 대표적인 확률분포로 실생활에서 통계를 적용하는 데에 기본이 되는 내용이다. 본 문항의 핵심 내용은「확률과 통계」의 ‘확률분포-이산확률변수’, ‘순열과 조합-이항정리’ 단원에서 다루어진다. 어느 시행이 오직 두 가지 가능한 결과만을 가질 때, 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 하면, n번의 독립시행에서 평균과 분산을 이항정리를 활용해서 n과 p로 나타낼 수 있음을 확인하는 문제이다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고, 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1)	이항정리를 활용할 수 있다.	20
	평균을 구하는 과정을 논리적으로 보일 수 있다.	30
1-2)	이항정리를 활용할 수 있다.	20
	분산을 구하는 과정을 논리적으로 보일 수 있다.	30

7. 예시 답안

1-1) n이하의 자연수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$x \cdot {}_n\mathrm{C}_x = x \cdot \frac{n!}{(n-x)!\,x!} = x \cdot \frac{n(n-1)!}{x\{(n-1)-(x-1)\}!\,(x-1)!} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}$$

이제 $q=1-p$라고 하면 $\mathrm{P}(X=x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x}$ $(x=0,1,2,\cdots,n)$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x} \left(= \sum_{x=1}^{n} x \cdot {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\right)\\ &= \sum_{x=1}^{n} n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1} p^x q^{n-x}\\ &= np\sum_{x=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1} p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)}\\ &= np(p+q)^{n-1} = np\end{aligned}$$

1-2) $2 \le x \le n$인 자연수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}x(x-1) \cdot {}_n\mathrm{C}_x &= x(x-1) \cdot \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\\ &= n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{\{(n-2)-(x-2)\}!\,(x-2)!}\\ &= n(n-1) \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\\ &= \sum_{x=0}^{n} \{x(x-1)+x\} \cdot {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\\ &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \cdot {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2} p^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)} + \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\\ &= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np = n(n-1)p^2 + np\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

이다.

<문제 3>

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	교육과정 과목명	기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	평면벡터, 내적
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

예각삼각형 ABC의 두 꼭짓점 B, C에서 각각의 대변에 내린 두 수선의 교점을 P라 하고,

$$u = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}, \qquad v = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \qquad w = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

라 하자. 이때 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ 를 만족시키는 두 실수 x, y의 값을 u, v, w를 사용하여 나타내어라.

3. 출제 의도

본 문제는 벡터의 수직과 벡터의 내적 같은 기본적인 평면 벡터의 성질의 이해 수준과 그 구체적인 적용 능력을 평가하고자 한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - 1 벡터의 연산 ① 벡터의 뜻을 안다. ② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - 2 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 안다. ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - 1 벡터의 연산 기벡1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - 2 평면벡터의 성분과 내적 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교	기하와 벡터	황선욱 외	㈜좋은책신사고	2014	52-80

교과서	기하와 벡터	이준열 외	㈜천재교육	2014	90-104
	기하와 벡터	김원경 외	㈜비상교육	2014	53-84

5. 문항 해설

본 문항의 핵심 내용은「기하와 벡터」의 ‘평면벡터’ 단원에서 다루어진다. 삼각형의 수심의 위치 벡터를 벡터의 수직과 벡터의 내적 같은 기본적인 평면 벡터의 성질을 이용해서 표현할 수 있는지를 확인하고 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제3	벡터의 수직과 내적과의 관계를 이용해서 연립방정식을 구할 수 있다.	80
	x, y의 값을 구할 수 있다.	20

7. 예시 답안

$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로, $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$이고 $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$이다. 즉,

$$(x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}=xv+yw-v=0,$$
$$(x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}=xu+yv-v=0$$

이다. 따라서 두 식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{v^2-vw}{v^2-uw}, \qquad y=\frac{v^2-uv}{v^2-uw}$$

이다.

<문제 4>

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제4	
출제 범위	교육과정 과목명	수학II
	핵심개념 및 용어	집합, 등차수열, 수열의 합
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

자연수 n에 대하여 집합 U_n을

$$U_n = \{x \mid -6n \le x \le 6n,\ x\text{는 정수}\}$$

라 하자. 다음 조건 (1), (2)를 모두 만족시키는 집합 A의 개수를 a_n이라 하고, 조건 (1), (2), (3)을 모두 만족시키는 집합 A의 개수를 b_n이라 하자.

(1) A는 원소의 개수가 5인 U_n의 부분집합이다.
(2) A의 모든 원소를 작은 수부터 순서대로 나열하면 등차수열이 된다.
(3) $0 \notin A$

1-1) a_n을 구하여라. (50점)

1-2) b_n을 구하여라. (50점)

3. 출제 의도

본 문제에서는 등차수열과 수열의 합을 이해하고 특정한 조건이 있는 부분집합의 개수를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

1-1) 등차수열의 조건을 이해하고 이러한 조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 수열의 합을 이용해서 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

1-2) 전체집합과 차집합 그리고 그것의 원소의 개수와의 관계를 이해하고 이를 이용해서 특정한 조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[수학II] - (가) 집합과 명제 - ① 집합 ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [수학II] - (다) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 ② 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할

문항 및 제시문		관련 성취기준
		수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 수학2112. 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. [수학II] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 수학2312-1. 등차수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
문제 1-1)	교육과정	[수학II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [수학II] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 ② 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학II] - (다) 수열 - $\boxed{2}$ 수열의 합 ② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 수학2112. 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. [수학II] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 수학2312-1. 등차수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. [수학II] - (다) 수열 - $\boxed{2}$ 수열의 합 수학2322. 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 1-2)	교육과정	[수학II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [수학II] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 ① 수열의 뜻을 안다.
	성취기준· 성취수준	[수학II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 수학2112. 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. [수학II] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	황성욱 외	㈜좋은책신사고	2014	12-27 98-103 119-124
	수학II	이준열 외	㈜천재교육	2014	12-25 116-124 138-143
	수학II	정상권 외	㈜금성출판사	2014	20-26 122-130 146-149

5. 문항 해설

집합 사이의 포함관계와 집합의 연산은 고등학교 수학과 교육과정에서 가장 기본이 되는 개념이고 수열은 함수의 극한과 미적분을 포함한 여러 가지 수학적 개념의 기본이 되는 부분이다. 본 문항은 학생들이 「수학Ⅱ」의 ‘집합’, ‘등차수열’, ‘수열의 합’의 개념들을 명확하게 이해하고 있는지를 평가하고 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가하고자 한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1)	조건 (1)과 (2)을 이용하여 첫째항과 공차의 관계와 조건을 표현할 수 있다.	30
	a_n을 구할 수 있다.	20
1-2)	$0 \in A$인 조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40
	b_n을 구할 수 있다.	10

7. 예시 답안

1-1) 조건 (1), (2)를 모두 만족시키는 A의 원소를 첫째항 a와 공차 d ($d \ge 1$)로 나타내면

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad a+4d \qquad (a,\ d\text{는 정수})$$

이므로

$$-6n \le a, \qquad a+4d \le 6n$$

이다. 따라서 d는 $a=-6n$일 때 최댓값 $3n$을 가지므로 $1 \le d \le 3n$이고, $d=k$일 때 a는 $-6n \le a \le 6n-4k$인 정수이므로 가능한 a의 개수는 $12n+1-4k$이다. 그러므로

$$a_n = \sum_{k=1}^{3n}(12n+1-4k) = 18n^2-3n$$

이다.

1-2) 조건 (1), (2)를 모두 만족시키는 A의 원소를

$$x_1=a,\quad x_2=a+d,\quad x_3=a+2d,\quad x_4=a+3d,\quad x_5=a+4d \qquad (a,\ d\text{는 정수},\ d \ge 1)$$

라 두자. 이제 조건 (1), (2)와 $0 \in A$를 모두 만족시키는 집합 A의 개수를 c_n이라 하면

$b_n = a_n - c_n$이다.

(i) $x_1=0$이면 $4 \le 4d \le 6n$이므로 가능한 d의 개수는 n이 짝수일 때 $\frac{3n}{2}$, n이 홀수일 때 $\frac{3n-1}{2}$

(ii) $x_2=0$이면 $3 \le 3d \le 6n$이므로 가능한 d의 개수는 $2n$

(iii) $x_3=0$이면 $2 \le 2d \le 6n$이므로 가능한 d의 개수는 $3n$

(iv) $x_4=0$이면 대칭성에 의해 $x_2=0$일 때와 같으므로 가능한 d의 개수는 $2n$

(v) $x_5=0$이면 대칭성에 의해 $x_1=0$일 때와 같으므로 가능한 d의 개수는 n이 짝수일 때 $\frac{3n}{2}$,

$$n\text{이 홀수일 때 } \frac{3n-1}{2}$$

따라서

$$c_n = \begin{cases} 10n & (\,n\text{은 짝수}) \\ 10n-1 & (\,n\text{은 홀수}) \end{cases}$$

이므로

$$b_n = \begin{cases} 18n^2-13n & (\,n\text{은 짝수}) \\ 18n^2-13n+1 & (\,n\text{은 홀수}) \end{cases}$$

이다.