2016학년도 수시모집 논술고사 해설지 (자연계열)

항목	내용	반영 근거(「2007 개정 교육과정」)
제시문	· 제시된 질문이 수학Ⅰ, Ⅱ, 적분과 통계, 기하와 벡터의 전반적인 내용을 담고 있으며, 자연계열학생이 학교에서 배우는 고교 교육과정의 범위와 수준 내의 개념에서 묻고 있는 것으로 판단됨. 문항의 내용적 측면에서도 고교 교육과정을 벗어나지 않으며, 교육과정 내에서 다룬 것을 바탕을 두고 있음. 지원자가 고등학교에서 배운 수학에 대한 내용 이해와 기본적인 계산능력을 바탕으로 문제해결력, 분석 및 추론능력 등을 평가할 수 있는 적절한 수준의 문제라고 생각되어짐.	· 수학Ⅰ, Ⅱ, 적분과 통계, 기하와 벡터
문항	· 문항1 계산능력	· 적분과 통계-통계-확률분포, 수학Ⅱ-함수의 극한과 연속-함수의 극한
	· 문항2 이해능력, 분석 및 추론능력	· 기하와 벡터-일차변환과 행렬-일차변환과 행렬
	· 문항3 계산능력, 분석 및 추론능력, 문제해결능력	· 수학Ⅱ-삼각함수-삼각함수
	· 문항4 논리적 사고력, 분석 및 추론능력, 문제해결능력	· 기하와 벡터-벡터-벡터의 성분과 내적

[문제 1]

(a)

$f(x)$가 확률밀도함수이므로

$$\int_0^a (t+1)e^{-x}dx = \left[-(t+1)e^{-x}\right]_0^a = (t+1)(1-e^{-a}) = 1$$

이다. 따라서

$$(t+1)(1-e^{-a}) = 1 \Leftrightarrow (1-e^{-a}) = \frac{1}{t+1} \Leftrightarrow e^{-a} = \frac{t}{t+1} \Leftrightarrow e^{a} = \frac{t+1}{t}$$

이므로 $a = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ 이다.

(b)

$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^a x^2 f(x)\,dx$이므로

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \int_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} x^2 \cdot (t+1)e^{-x}dx = (t+1)\int_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} x^2 e^{-x}dx \\
&= (t+1)\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} + (t+1)\int_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} 2x\,e^{-x}\,dx \\
&= (t+1)\left(-\frac{t}{t+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^2\right) + 2(t+1)\int_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} xe^{-x}\,dx \\
&= -t\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^2 + 2(t+1)\left[-xe^{-x}\right]_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} + 2(t+1)\int_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} e^{-x}dx \\
&= -t\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^2 - 2t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) + 2(t+1)\int_0^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} e^{-x}dx \\
&= -t\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^2 - 2t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) + 2
\end{aligned}$$

이다. 또한 $\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}(X^2)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}(X^2) &= \lim_{t\to\infty}\left(-t\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^2 - 2t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) + 2\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 - 2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t + 2\right) = 0 - 2\ln e + 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

[문제 2]

(a)

지수함수와 로그함수의 관계로부터 S_n은 연립부등식

$$y \geq 0, \qquad 10^y \leq x \leq a_n = 10^n - 1$$

을 만족하는 모든 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다. 따라서 y는 $0 \leq y < n$인 정수이고,

$$y = k\text{일 때 } 10^k \leq x \leq 10^n - 1$$

이므로, 이 때 순서쌍의 개수는 $10^n - 10^k$이다. 그러므로

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(10^n - 10^k) = \sum_{k=0}^{n-1}10^n - \sum_{k=0}^{n-1}10^k = n10^n - \frac{10^n - 1}{9} = \left(n - \frac{1}{9}\right)10^n + \frac{1}{9}$$

이다.

(b)

$\log a_n$의 가수를 t_n라 하면 $\log a_n = n - 1 + t_n$ $(0 \leq t_n < 1)$이다. 그런데 $0 \leq \dfrac{t_n}{n} < \dfrac{1}{n}$이고

$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t_n}{n} = 0$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n \log a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n - \frac{1}{9}\right)10^n + \frac{1}{9}}{(10^n - 1)(n - 1 + t_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1 - \frac{1}{9n}\right) + \frac{1}{9n10^n}}{\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\left(1 + \frac{t_n - 1}{n}\right)} = \frac{(1-0)+0}{(1-0)(1+0)}$$

이다.

[문제 3]

(a)

일차변환에 의하여 점 $(1,1)$은 점 $(\sin\theta+1, \sin^2\theta+\sin\theta)$으로 옮겨지고 이 점은 부등식 $(x-1)^2+(y-1)^2 \le 1$을 만족하므로

$$(\sin\theta+1-1)^2+(\sin^2\theta+\sin\theta-1)^2 = \sin^4\theta+2\sin^3\theta-2\sin\theta+1 \le 1$$

이다. $t=\sin\theta$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고, 위 부등식은

$$t^4+2t^3-2t \le 0$$

이 된다. $f(t)=t^4+2t^3-2t$라 놓으면 $f'(t)=4t^3+6t^2-2=2(t+1)^2(2t-1)$이므로 f의 극댓값은 존재하지 않고 f의 극솟값은 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 $-\dfrac{11}{16}$이다. 이 함수의 그래프의 개형을 그려보면 방정식 $f(t)=0$은 양의 근을 오직 1개만 갖는 것을 알 수 있다. 이 양의 근을 α라 하자. 그러면 부등식 $f(t) \le 0$의 해는 $0 \le t \le \alpha$이다. 이때 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{11}{16} < 0$이고 $f(0.9)=0.3141>0$이므로 중간값의 정리에 의하여 $0.5<\alpha<0.9$임을 알 수 있다.

따라서 $0 \le t=\sin\theta \le \alpha < 0.9$이다.

(b)

삼각함수 배각의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}17-4\cos 2\theta\sin\theta-20\sin\theta-9\cos 2\theta &= 17-4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta-20\sin\theta-9(1-2\sin^2\theta)\\ &= 8\sin^3\theta+18\sin^2\theta-24\sin\theta+8\end{aligned}$$

이 된다. $t=\sin\theta$로 놓고, $g(t)=8t^3+18t^2-24t+8$라 하자.

$g'(t)=24t^2+36t-24=12(2t-1)(t+2)$이므로 함수 g는 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 극솟값을 갖는다.

$0 \le t \le \alpha$이므로 $g(t)$는 $t=0$ 또는 $t=\alpha$에서 최댓값을 갖는다. $g(0)=8$이고 $0.5<t<0.9$에서 $g(t)$는 증가하며 $0.5<\alpha<0.9$이므로 $g(\alpha)<g(0.9)=6.812<8$이다. 그러므로 $g(t)$는 $t=0$일 때, 최댓값 8을 갖는다.

따라서 $17-4\cos 2\theta\sin\theta-20\sin\theta-9\cos 2\theta$의 최댓값은 8이다.

[문제 4]

좌표평면에서 $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(c,0), \mathrm{C}(\alpha,\beta), \mathrm{P}(x,y)$라 하자. 이 때
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-x,\ -y)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(c-x,\ -y)$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(\alpha-x, \beta-y)$ 이다.

$Q=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} Q &= (-x)(c-x)+(-y)(-y)+(c-x)(\alpha-x)+(-y)(\beta-y)+(\alpha-x)(-x)+(\beta-y)(-y) \\ &= 3x^2-2(c+\alpha)x+3y^2-2\beta y+c\alpha \\ &= 3\left(x-\frac{c+\alpha}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{\beta}{3}\right)^2+c\alpha-\frac{(c+\alpha)^2+\beta^2}{3} \end{aligned}$$

이다. 점 $\mathrm{G}\left(\frac{c+\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 삼각형 내부의 점이다.

따라서 Q의 최솟값은 $\mathrm{P}=\mathrm{G}$일 때 $c\alpha-\frac{(c+\alpha)^2+\beta^2}{3}$이다.

또한 $b^2=\alpha^2+\beta^2$, $a^2=(\alpha-c)^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2c\alpha+c^2$이므로 $\alpha^2+\beta^2=b^2$ 과
$2c\alpha=b^2+c^2-a^2$이다.
따라서 Q의 최솟값은

$$c\alpha-\frac{(c+\alpha)^2+\beta^2}{3}=\frac{c\alpha-c^2-(\alpha^2+\beta^2)}{3}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-c^2-b^2}{3}=-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$ 이다.

$\overline{\mathrm{GP}}^2=\left(x-\frac{c+\alpha}{3}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{3}\right)^2$이므로 점 P가 무게중심에서 가장 멀리 떨어진 꼭짓점일 때 Q가 최댓값을 가진다.

$\mathrm{P}=\mathrm{A}$일 때 $Q=bc\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$,

$\mathrm{P}=\mathrm{B}$일 때 $Q=ca\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$,

$\mathrm{P}=\mathrm{C}$일 때 $Q=ab\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$이다.

그런데 $a\le b\le c$이므로 Q의 최댓값은 $\mathrm{P}=\mathrm{A}$일 때 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$이다.