[문제 1] (총 100점)

다음 물음에 답하여라.

(a) 한 변의 길이가 2인 정 n각형의 넓이 S_n을 구하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ 의 값을 구하여라. (50점)

(b) 반지름의 길이가 1인 구에 외접하는 원뿔의 부피의 최솟값을 구하여라. (50점)

[예시답안 및 채점기준]

(a) 정 n각형의 외접원의 반지름의 길이를 x라 하면 코사인 법칙에 의해

$$2^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos\frac{2\pi}{n},\quad x^2 = \frac{2}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}$$

이므로 $S_n = n\cdot\frac{1}{2}x^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = n\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}$이다. (20점)

또 $\sin\frac{2\pi}{n} = 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$, $1-\cos\frac{2\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\pi}$이다. (30점)

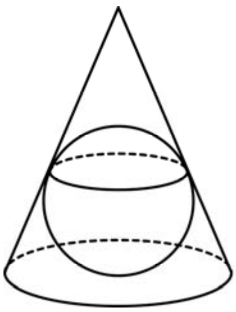
※별해 - 중심에서 변에 수선을 내리면 $2n$개의 직각삼각형을 얻게 된다. 따라서

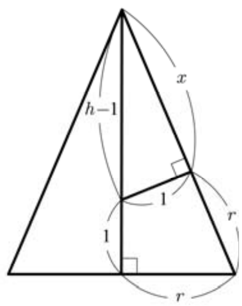
$$S_n = 2n\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{n}\right) = n\cot\frac{\pi}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}$$

(b) 외접하는 원뿔의 높이를 $h(h>2)$, 밑면의 반지름의 길이를 r, 빗변의 길이를 $x+r$이라 하면 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$이고, $\frac{x}{1} = \frac{h}{r}$, $x^2 = (h-1)^2 - 1^2 = h(h-2)$이므로

$r^2 = \frac{h^2}{x^2} = \frac{h^2}{h(h-2)} = \frac{h}{h-2}$이고 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{h-2}$이다. (30점)

또 $\frac{h^2}{h-2} = (h-2) + \frac{4}{h-2} + 4 \geq 2\sqrt{(h-2)\cdot\frac{4}{h-2}} + 4 = 8$이고 등호는 $h=4$일 때 성립하므로 구하는 값은 $\frac{8\pi}{3}$이다. (20점)





[문제 2] (총 100점)

함수 $f(x)=\dfrac{x^2-x\ln(x+1)}{e^x}$ $(x>0)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) $x>0$일 때, $0<f(x)<\dfrac{1}{2}x$임을 보여라. (60점)

(b) $a_1=f(1)$이고 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=f(a_n)$라고 할 때, 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라. (40점)

[예시답안 및 채점기준]

(a) $h(x)=x-\ln(x+1)$라 하면 $h(0)=0$이고, $x>0$일 때 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}>0$ 이므로 $h(x)>0$ 이다.

따라서 $x>0$일 때 $0<f(x)=\dfrac{x(x-\ln(x+1))}{e^x}$이다. (20점)

또 $x>0$일 때 $\ln(x+1)>0$이므로 $\dfrac{x-\ln(x+1)}{e^x}<\dfrac{x}{e^x}$이다.

이제 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$라 하면 $g'(x)=(1-x)e^{-x}$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $g(1)=\dfrac{1}{e}$을 가진다.

따라서

$$g(x)\le\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$$

이므로

$$\frac{x-\ln(x+1)}{e^x}<\frac{1}{2}$$

임을 보였다.

그러므로 $x>0$일 때 $f(x)<\dfrac{1}{2}x$이다. (40점)

(b) (a)에 의하여

$$0<a_1=f(1)<\frac{1}{2},\ 0<a_2=f(a_1)<\frac{1}{2}a_1<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

이다. 이를 반복적으로 적용하면

$$0<a_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이므로

$$0\le a_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

을 얻는다.

(20점)

위 부등식의 양쪽 수열에 극한을 택하면

$$\lim_{n\to\infty}0=0=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이므로 극한의 성질에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다. (20점)

[문제 3] (총 100점)

곡선 $y=\sqrt{x}(|\sin nx|+\sin nx)$를 구간 $[0,\pi]$에서 x축의 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피 V_n을 구하여라. (단, n은 자연수이다.)

[예시답안 및 채점기준]

$[0,\pi]$에서 $\sin nx \ge 0$인 x의 범위는

$$\frac{(2k-2)\pi}{n} \le x \le \frac{(2k-1)\pi}{n} \qquad (k=1,\ \cdots,\ \left[\frac{n+1}{2}\right])$$

이다. 여기서 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다. (20점)

한편

$$\int x\sin^2 x\,dx = \int \frac{x-x\cos 2x}{2}dx = \frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C$$

이므로, (20점)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} \pi(2\sqrt{x}\,\sin nx)^2\,dx &= \frac{4\pi}{n^2}\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} t\sin^2 t\,dt \qquad (t=nx\text{로 치환})\\ &= \frac{4\pi}{n^2}\left[\frac{t^2}{4}-\frac{t\sin 2t}{4}-\frac{\cos 2t}{8}\right]_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\\ &= \frac{\pi^3}{n^2}(4k-3)\end{aligned}$$

이다. (30점)

이를 이용하면, n이 홀수일 때는

$$V_n=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} \pi(2\sqrt{x}\,\sin nx)^2dx = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\pi^3}{n^2}(4k-3) = \frac{(n+1)}{2n}\pi^3$$

이고 n이 짝수일 때는

$$V_n=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} \pi(2\sqrt{x}\,\sin nx)^2dx = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\pi^3}{n^2}(4k-3) = \frac{(n-1)}{2n}\pi^3$$

이다.

따라서

$$V_n=\begin{cases}\dfrac{(n+1)}{2n}\pi^3, & n\text{은 홀수}\\[2mm] \dfrac{(n-1)}{2n}\pi^3, & n\text{은 짝수}\end{cases}$$

이다. (30점)

[문제 4] (총 100점)

어느 집단에서 ABO식 혈액형 분포가 A형일 확률이 $\frac{5}{11}$, B형일 확률이 $\frac{2}{11}$이고 O형일 확률이 $\frac{4}{11}$라고 하자. 어떤 시약을 사용하여 혈액형을 판정한다고 할 때 확률은 다음과 같다.

A형을 A형으로 판정할 확률 = B형을 B형으로 판정할 확률 = O형을 O형으로 판정할 확률 = p
A형을 B형으로 판정할 확률 = B형을 O형으로 판정할 확률 = O형을 A형으로 판정할 확률 = $(1-p)^2$
A형을 O형으로 판정할 확률 = B형을 A형으로 판정할 확률 = O형을 B형으로 판정할 확률 = $p-p^2$

이 집단에서 임의의 한 사람을 뽑아 혈액형을 판정할 때, 다음 물음에 답하여라.
(a) A형으로 판정할 확률과 B형으로 판정할 확률을 각각 구하여라. (40점)
(b) O형으로 판정이 나왔을 경우, 실제로 O형일 확률을 구하여라. (60점)

[예시답안 및 채점기준]

(a) A형일 확률이 $\frac{5}{11}$, B형일 확률이 $\frac{2}{11}$이고 O형일 확률이 $\frac{4}{11}$이고 $\frac{5}{11}+\frac{2}{11}+\frac{4}{11}=1$이므로 AB형일 확률은 0이다. 또 실제 A형이고 A형으로 판정할 확률은 $\frac{5}{11}\cdot p$, 실제 B형이고 A형으로 판정할 확률은 $\frac{2}{11}\cdot(p-p^2)$, 실제 O형이고 A형으로 판정할 확률은 $\frac{4}{11}\cdot(1-p)^2$이므로 A형으로 판정할 확률은 $\frac{5p}{11}+\frac{2(p-p^2)}{11}+\frac{4(1-p)^2}{11}=\frac{2p^2-p+4}{11}$이다. (20점)

같은 방법으로 B형으로 판정할 확률은 $\frac{5(1-p)^2}{11}+\frac{2p}{11}+\frac{4(p-p^2)}{11}=\frac{p^2-4p+5}{11}$이다. (20점)

(b) 실제 O형일 사건을 O, O형으로 판정할 사건을 O'라고 하면 구하는 값은 $\mathrm{P}(O|O')$이다.
주어진 조건에 의해 $\mathrm{P}(O)=\frac{4}{11}$, $\mathrm{P}(O'|O)=p$이므로

$$\mathrm{P}(O\cap O')=\mathrm{P}(O'|O)\cdot\mathrm{P}(O)=p\cdot\frac{4}{11}=\frac{4p}{11}$$

이다. (20점)

또 A형으로 판정할 확률을 구하는 것과 같은 방법으로

$$\mathrm{P}(O')=\frac{-3p^2+5p+2}{11}$$

이므로 (20점)

$$\mathrm{P}(O|O')=\frac{\mathrm{P}(O\cap O')}{\mathrm{P}(O')}=\frac{\frac{4p}{11}}{\frac{-3p^2+5p+2}{11}}=\frac{4p}{-3p^2+5p+2}$$

이다. (20점)

내용영역 및 출제의도

<table>
<tr><th rowspan="2">문항</th><th colspan="3">교육과정 내용영역</th><th rowspan="2">출제의도
(평가영역)</th></tr>
<tr><th>과목</th><th>대단원</th><th>중단원</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>수학II</td><td>함수의
극한과 연속</td><td>함수의 극한</td><td rowspan="2">이해능력,
문제해결능력</td></tr>
<tr><td>기하와 벡터</td><td>공간도형과
공간좌표</td><td>공간도형</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>수학I</td><td>수열의 극한</td><td>무한수열의 극한</td><td rowspan="3">계산능력,
이해능력,
문제해결능력,
창의적 사고능력</td></tr>
<tr><td rowspan="2">수학II</td><td rowspan="2">미분법</td><td>여러 가지 함수의
미분법</td></tr>
<tr><td>도함수의 활용</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>수학I</td><td>수열</td><td>여러 가지 수열</td><td rowspan="2">계산능력,
이해능력,
문제해결능력</td></tr>
<tr><td>적분과 통계</td><td>적분법</td><td>정적분의 활용</td></tr>
<tr><td>4</td><td>적분과 통계</td><td>확률</td><td>조건부확률</td><td>이해능력,
문제해결능력</td></tr>
</table>