2015학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열)

1. 내용영역 및 출제의도

<table>
<tr><th rowspan="2">문항</th><th colspan="3">교육과정 내용영역</th><th rowspan="2">출제의도
(평가영역)</th></tr>
<tr><th>과목</th><th>대단원</th><th>중단원</th></tr>
<tr><td>1</td><td>기하와 벡터</td><td>벡터</td><td>직선과 평면의 방정식</td><td>이해능력</td></tr>
<tr><td>2</td><td>적분과 통계</td><td>적분법</td><td>정적분의 활용</td><td>계산능력,
이해능력,
문제해결능력</td></tr>
<tr><td>3</td><td>수학I</td><td>수열</td><td>여러 가지 수열</td><td>분석 및 추론능력,
문제해결능력</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">수학Ⅱ</td><td>삼각함수</td><td>삼각함수의 덧셈정리</td><td rowspan="2">이해능력,
논리적 사고력,
문제해결능력</td></tr>
<tr><td>함수의
극한과 연속</td><td>함수의 연속</td></tr>
</table>

* 전반적으로 고등학교에서 학습한 다양한 내용의 범위에서, 이공계학생에게 필요한 계산능력 및 이해정도와 이를 활용하여 결론을 논리적 비약 없이 잘 서술할 수 있는 논리적 사고력, 분석 및 추론 능력, 문제해결능력을 평가하고자 하였다.

1. 예시답안

[문제 1]

점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$와 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리를 h라고 하고, 점 P에서 평면 $ax+by+cz+d=0$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_1, y_1, z_1)$이라고 하면 $h=|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|$이고, $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$는 평면 $ax+by+cz+d=0$의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 평행하므로

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=t\vec{n}$$

인 실수 t가 존재한다. 이때 $(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)=t(a, b, c)$이다.
따라서

$$x_1=x_0-at,\ y_1=y_0-bt,\ z_1=z_0-ct$$

이고 점 H가 평면 $ax+by+cz+d=0$의 점이므로 다음이 성립한다.

$$a(x_0-at)+b(y_0-bt)+c(z_0-ct)+d=0,\ t=\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$

따라서 $h=|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|=|t||\vec{n}|=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$이다.

[문제 2]

포물선 $y=x^2+8x+15$와 직선 $y=x+5$의 교점의 x좌표는 $x=-5$와 $x=-2$이다.
또 구간 $[-5,-4]$에서 $0\le x+5\le -\left(x^2+8x+15\right)$, 구간 $[-4,-3]$에서 $0\le -\left(x^2+8x+15\right)\le x+5$,
구간 $[-3,-2]$에서 $0\le x^2+8x+15\le x+5$이다.

따라서 구하는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-5}^{-4}(x^2+8x+15)^2\,dx+\pi\int_{-4}^{-3}(x+5)^2\,dx+\pi\int_{-3}^{-2}\left\{(x+5)^2-(x^2+8x+15)^2\right\}dx\\&=\pi\int_{-5}^{-4}\left\{(x+4)^2-1\right\}^2dx+\pi\int_{-4}^{-2}(x+5)^2\,dx-\pi\int_{-3}^{-2}\left\{(x+4)^2-1\right\}^2dx\end{aligned}$$

이제 $t=x+4$라 하면,

$$\int_{-5}^{-4}\left\{(x+4)^2-1\right\}^2dx=\int_{-1}^{0}(t^2-1)^2dt=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\ ,$$

$$\int_{-3}^{-2}\left\{(x+4)^2-1\right\}^2dx=\int_{1}^{2}(t^2-1)^2dt=\frac{31}{5}-\frac{14}{3}+1$$

이고

$$\int_{-4}^{-2}(x+5)^2\,dx=\frac{26}{3}$$

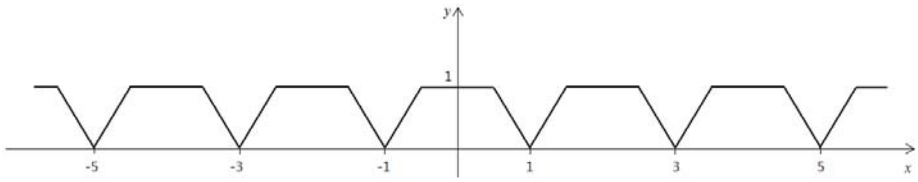
이므로,

$$V=\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1+\frac{26}{3}-\frac{31}{5}+\frac{14}{3}-1\right)=\frac{20}{3}\pi$$

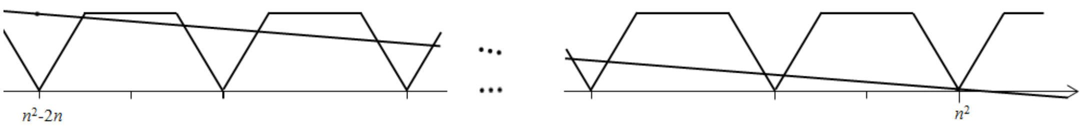
이다.

[문제 3]

조건으로부터 함수 $y=f(x)$는 주기가 2이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



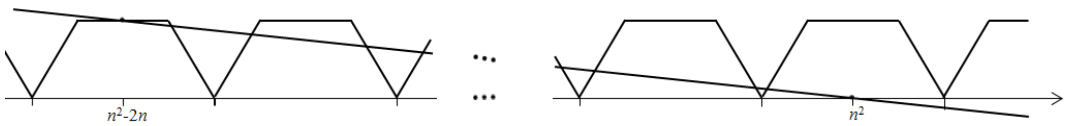
직선 $y=-\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{n}{2}$을 l_n이라 하자. 함수 $y=f(x)$의 치역이 구간 $[0,1]$이므로 점 (a,b)가 직선 l_n과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점이면 $0\le b\le 1$이다. 특히 직선 l_n과 직선 $y=0$, $y=1$의 교점은 각각 $(n^2,0)$과 $(n^2-2n,1)$이다.
n이 홀수이면 n^2과 n^2-2n은 홀수이므로 직선 l_n과 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $k=1,2,\cdots,n$일 때 구간 $(n^2-2n+2k-2,n^2-2n+2k]$에서 직선 l_n과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점은 2개이므로

$$a_n=2n$$

이다.
n이 짝수이면 n^2과 n^2-2n은 짝수이므로 직선 l_n과 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그림으로부터 직선 l_n과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.
  [1] $k=1,2,\cdots,n$일 때 구간 $(n^2-2n+2k-3,n^2-2n+2k-1]$에서 각각 2개
  [2] 구간 $(n^2-1,n^2]$에서 1개
따라서 n이 짝수이면

$$a_n=2n+1$$

이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^{99}a_k=\sum_{k=1}^{50}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{49}a_{2k}=\sum_{k=1}^{50}(4k-2)+\sum_{k=1}^{49}(4k+1)=9949$$

이다.

[문제 4]

(a) $\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$

$= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta) = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(b) $x = 100\cos\frac{4\pi}{9}$라 하자. (a)에 의하여

$$-\frac{1}{2} = \cos\left(3 \cdot \frac{4\pi}{9}\right) = 4\cos^3\frac{4\pi}{9} - 3\cos\frac{4\pi}{9}$$

이므로

$$8\cos^3\frac{4\pi}{9} - 6\cos\frac{4\pi}{9} + 1 = 0$$

이다. 이 식에 $\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{x}{100}$을 대입하면

$$8x^3 - 60000x + 1000000 = 0$$

이다. 이제

$$f(x) = 8x^3 - 60000x + 1000000$$

라 하면

$$f'(x) = 24x^2 - 60000 = 24(x-50)(x+50)$$

이므로, 함수 $f(x)$는 $x=-50$일 때 극댓값 3000000을 갖고, $x=50$일 때 극솟값 -1000000을 갖는다.
그러므로 방정식 $f(x)=0$의 근은 구간 $(-\infty, -50)$, $(-50, 50)$, $(50, \infty)$에 각각 하나씩 존재한다.
한편

$$\frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{4\pi}{9} < \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

이다. 그러므로

$$0 < x = 100\cos\frac{4\pi}{9} < 50$$

이다.
0과 50 사이에 존재하는 근의 범위를 찾기 위하여 주어진 표를 이용하면 다음을 얻는다.

$$f(17) = 19304 > 0$$
$$f(18) = -33344 < 0$$

따라서 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 $17 < x < 18$에서 해를 갖는다.
그러므로 $x = 100\cos\frac{4\pi}{9}$의 정수 부분은 17이다.